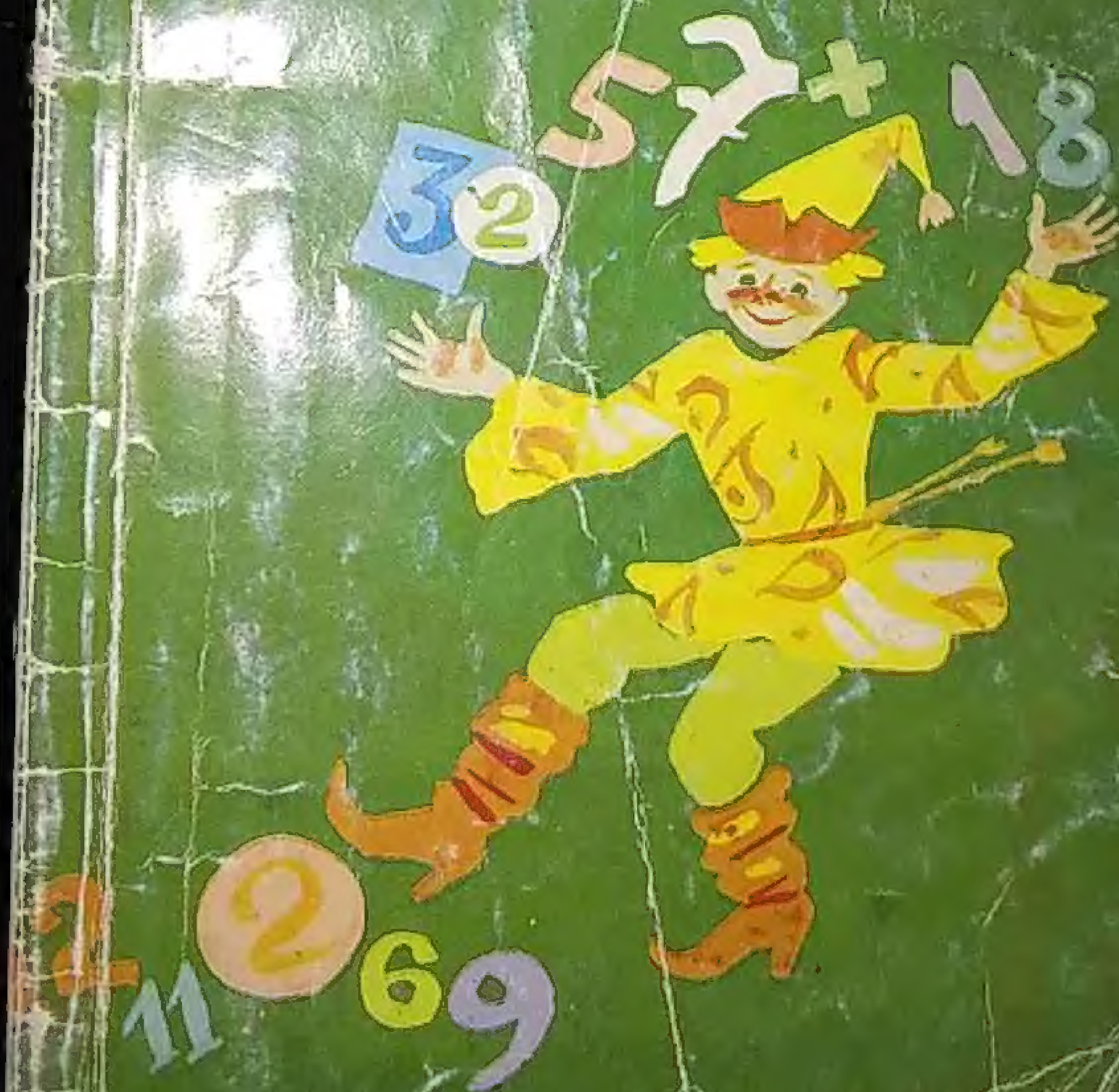
Я. И. Перельман

Занимательная АРИФМЕТИКА



Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

Москва 1994
АО «СТОЛЕТИЕ»

ББК 22.3
П27

Оформление З. Яриной

Репринтное издание—М. 1934 г.

Перельман Я.И

П27 Занимательная арифметика.—М.: АО «СТОЛЕТИЕ», 1994,—176 с.

П $\frac{4809000000-02}{41А(03)-94}$ Без объявл.

ISBN 5-7459-0002-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

На русском языке имеется уже ряд оригинальных и переводных сборников,[1] преследующих в общем ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную арифметику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг черпает материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда — близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих, с различной детальностью, почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.

«Занимательная арифметика» представляет в большей своей части попытку предложить ряд *новых*, еще не разрабатывавшихся сюжетов арифметических развлечений. Подыскание новых тем в столь многосторонне обследованной области — дело нелегкое: составитель не может здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и безызвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к «Занимательной арифметике», как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.

Заботясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал запутанных вопросов и включал преимущественно такой материал, который вполне посилен для большинства читателей.

---

[1] Среди них известный сборник Е. И. *Игнатьева* «В царстве смекалки» (из трех его книг 2-я и 3-я составлены при моем участии) почти исчерпывает весь „классический" материал арифметических развлечений.

Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные быть может и для более сведущих.

Убедительная просьба ко всем читателям — не отказать сообщить автору о замеченных ими недостатках книги.[1] За ранее сделанные указания автор выражает корреспондентам глубокую признательность.

К сведению читателей, которые заинтересуются материалом этой книги, сообщаю названия других составленных мною сборников арифметических головоломок:

«Занимательные задачи» (изд. «Молодой Гвардии»),
«Живая математика» (изд. ГТТИ),
«Фокусы и развлечения» (изд. «Детгиза»).

Я. П.

---

[1] Адрес для корреспонденции: Ленинград, 136, Плуталова ул. 2, кв. 12. Якову Исидоровичу Перельману.



Рис. 1. Таинственные знаки появились, неизвестно как, у дверей многих квартир...

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ

ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

Задача № 1

В марте 1917 г. жители Ленинграда (тогда — Петрограда) были не мало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися, неизвестно как, у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные значения. Те, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами.

Пошли зловещие слухи о грабительских шайках, помечающих квартиры будущих жертв. «Комиссар временного правительства по г. Петрограду», успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению». Иначе «комиссар» не мог объяснить этих знаков...

Таинственные восклицательные знаки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих

соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне однако разгадать нехитрый и совсем не страшный секрет этой тайнописи.

Решение

Своими соображениями я поделился с согражданами, поместив в газете следующую заметку:

«Таинственные знаки»

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:

††!! ††!!!!! †††!!!

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание естественно внушает тревогу жильцам. Между тем, смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

†!!	††!!!!!	†††!!!
12	25	33

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось во всех без исключения случаях, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта очевидно принадлежит дворникам-китайцам,[1] не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, конечно, давно, но только в дни Февральской революции обратили на себя внимание граждан.»[2]

---

[1] Их было много тогда в Петрограде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

[2] Читателю наших дней покажется вероятно очень странным, что знаки эти оставались до дней февральской революции незамеченными. Напомню однако, что большинство живших в квартирах с двумя входами пользовались обычно только парадной лестницей и впервые вышли на черную в дни революции, когда парадные двери были закрыты.

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с косыми крестами, обнаружены были и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов «тайнописи», вовсе не подозревавших, что их безыскуственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли петроградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки — единицы? Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. «Нумерация» эта давно уже в широком употреблении и понятна была каждому, даже неграмотному прежде крестьянину. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты — десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация была некогда у нас даже узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, — читаем мы в старом Своде законов, — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и знаками. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком . . □
рубль . . . . ○
десять копеек . . . . ✕
копейку . . . . |
четверть . . . . —

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

(□□○○○○○○○○✕✕✕✕✕|||||||≡)»

В другом месте того же тома «Свода законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысячи

рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей — в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

Вот текст закона об этих так называемых «ясачных знаках»:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания.[1] Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда) тысяча руб.,
(колесо) сто рублей,
□ десять рублей,
╳ один рубль,
| десять коп.,
| копейку.

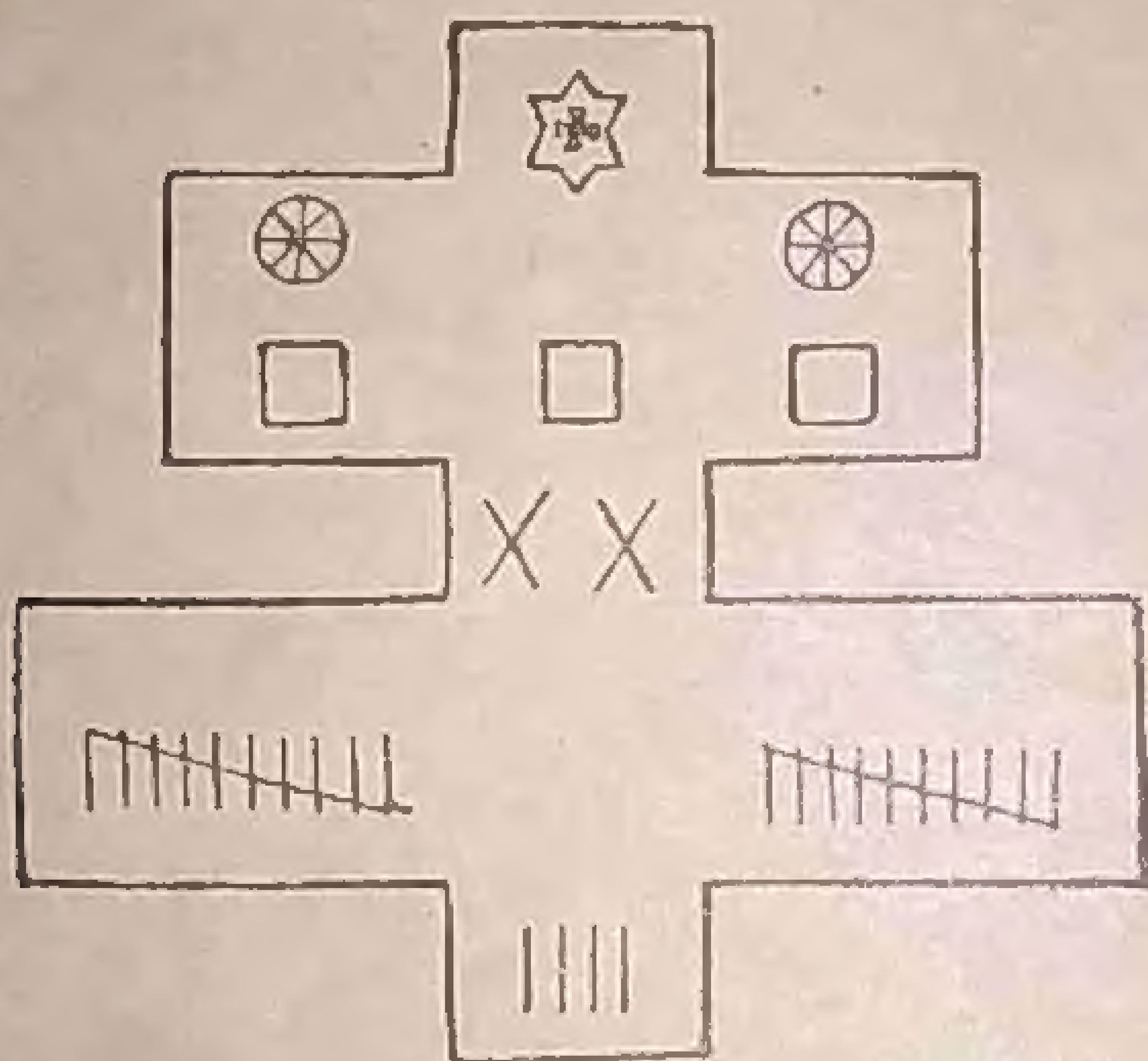


Рис. 2. Старинная запись на квитанции в уплате подати («ясака»). Эта запись означает сумму 1232 р. 24 к.

«Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например: 1232 р. 24 к. изображают так» (см. рис. 2).

Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел. В старину применялись у нас, да и еще теперь кое-где по деревням применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, какие были в употреблении: многие торговцы, например, имели свои секретные знаки для числовых обозначений,— так называемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.

---

[1] Это показывает, что описанные знаки были в широком употреблении среди населения.

СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ МЕТЫ

В прежнее время на вещах, купленных у офеней или в частных магазинах, особенно провинциальных, можно было зачастую заметить непонятные буквенные обозначения вроде

а ве *в уо.*

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначал на товаре, но так однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникал в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называл покупателю цену с запросом.

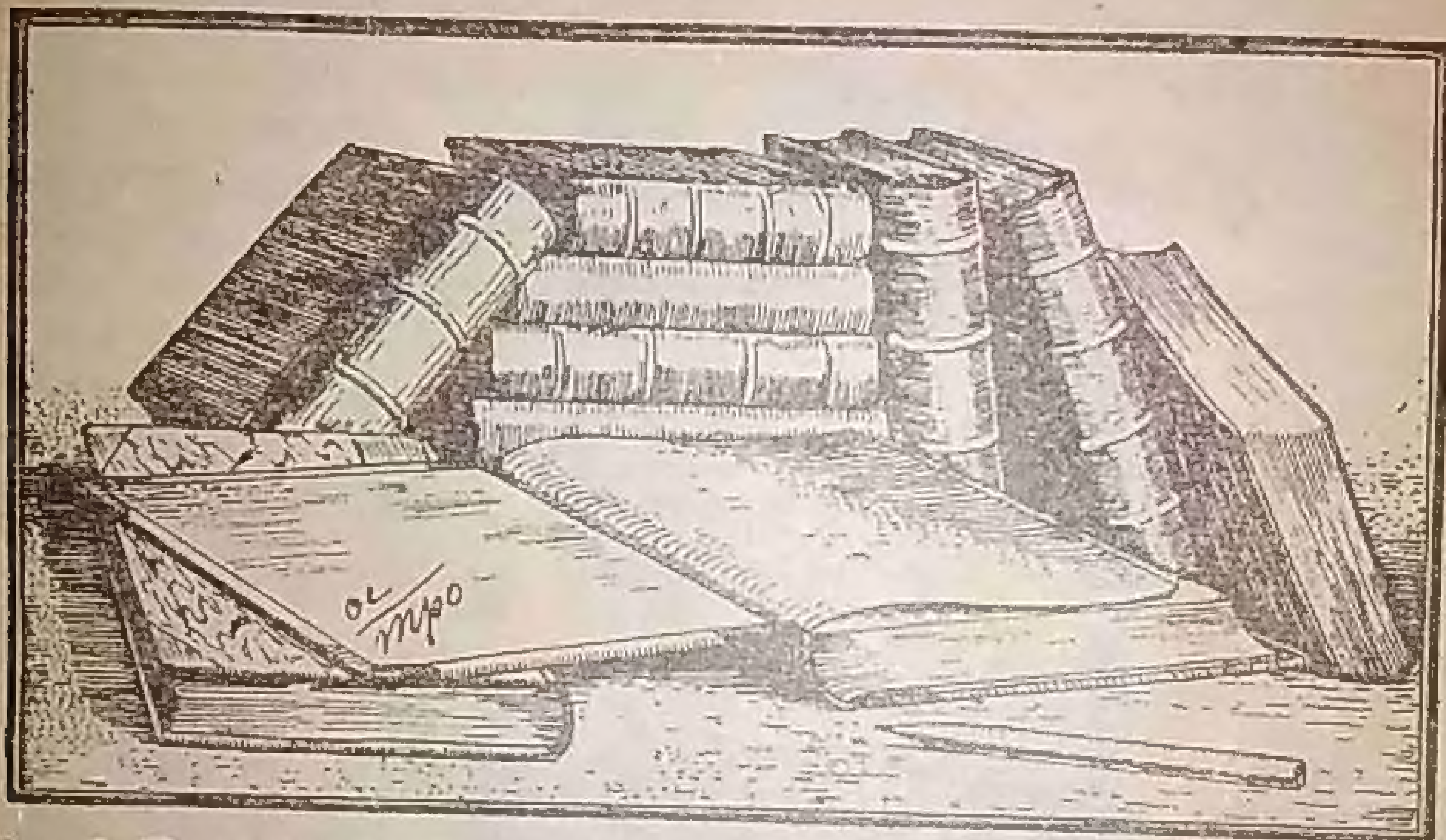


Рис. 3. Торговая «мета» на крышке переплета (изображенная здесь мета означала, что себестоимость книги 50 к., а продажная цена 1 р. 25 к.)

Система обозначения была весьма проста. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: *трудолюбие*, *правосудие*, *ярославецъ*, *миролюбецъ*, *Миралюбовъ*. Первая буква слова обозначала — 1, вторая — 2, третья — 3 и т. д; десятою буквою обозначался ноль. Помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначал на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе прибылей.

Если, например, выбрано было слово:

п р а в о с у д и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 р. 75 к. обозначалось так:

в уо.

Иногда цена на товаре писалась в виде дроби; например на одной из купленных мною книг (рис. 3) имеется обозначение

$$\frac{\textit{ое}}{\textit{тро}}$$

Это значит, при ключе «трудолюбие», что надо запросить 1 р. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.

АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

После сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только помощью цифр, но и помощью любых иных знаков или даже предметов — карандашей, перьев, линеек, ножей и т. п.; надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами — складывать, вычитать, умножать, делить.

Вот, например, ряд числовых действий, обозначенный предметами сервировки стола (рис. 4). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Задача № 2

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шампольон. Но ваша задача гораздо легче; вы ведь знаете, что числа здесь, хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, т. е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами.[1] Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

[1] В VII строке показано действие деления, причем расположение дается необычное: делитель — вправо, а частное — влево от делимого. Это расположение имеет свои преимущества и распространено в Англии.

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку», или что «ложка» + «ложка» = = «ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении сама на себя? Это может быть только 2, потому что $2 \times 2 = 2 + 2$. Таким образом узнаем, что «ложка» = 2 и, следовательно, «нож» = 4.

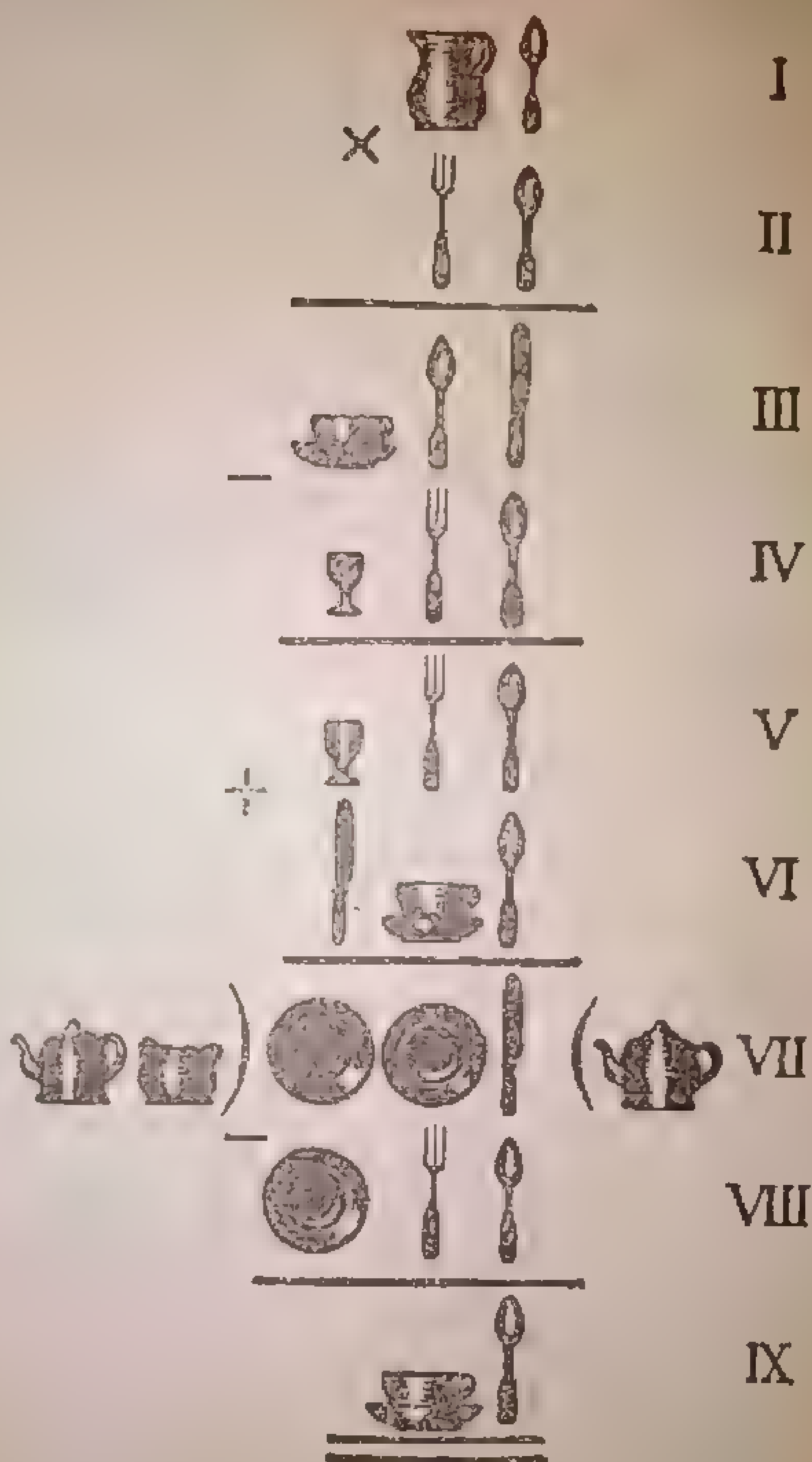


Рис. 4. Над какими числами производятся обозначенные здесь арифметические действия?

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена «вилкой»? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где «вилка» участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же «вилка» фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании два минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1, и тогда 2—1 = 1; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для «вилки» в других действиях. Обратите внимание на сложение V и VI рядов: «вилка» (т. е. 6) + «чашка» = «тарелке»; значит «чашка» должна быть меньше 4 (потому что в рядах VII и VIII «тарелка» минус «вилка» = «чашке»). Но «чашка» не может равняться двойке, так как двойка обозначена уже «ложкой»; не может «чашка» быть и единицей — иначе вычитание IV ряда из III не могло бы дать трехзначного числа в V ряду. Не может, наконец, «чашка» обозначать и 3 — вот почему: если «чашка» = 3, то «бокальчик» (см. ряды IV и V) должен обозначать единицу, потому что 1 + 1 = 2, т. е. «бокальчик» + «бокальчик» = «чашке», убавленной на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; «бокальчик» же равняться единице не может, потому что тогда «тарелка» в VII ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 («бокальчик» + «нож»), а в другом цифру 6 («вилка» + «чашка»), чего быть не может. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких — довольно, правда, долгих — поисков, что «вилка» обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что «чашка» обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена «ножом». Итак, «чашка» обозначает цифру 6, а следовательно, «бокальчик» — цифру 3.

Какая же цифра обозначена «кувшинчиком» в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно «кувшинчик» = 5.

Значение «тарелки» определяется просто: в VII ряду «тарелка» = «вилке» + «чашка» = «бокальчику» + «нож»; т. е. «тарелка» = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Остается разгадать цифровое значение «чайника» и «сахарницы» в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставим в действие деления, изображенное в последних трех рядах, соответствующие цифры вместо предметов, получим такое расположение (буквами *ч* и *с* обозначены «чайник» и «сахарница»):

чс) 774 (*ч*

712

62

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел *чс* и *ч*, которые, конечно, не могут быть ни нолем, ни оканчиваться нолем: значит, ни *ч*, ни *с* не есть ноль. Остается два предположения: *ч* = 8 и *с* = 9, или же, наоборот, *ч* = 9 и *с* = 8. Но перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, «чайник» обозначает 8, а «сахарница» 9 (действительно: $89 \times 8 = 712$).

Итак, мы путем нехитрых арифметических вычислений разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5	чашка = 6	сахарница = 9
ложка = 2	бокальчик = 3	тарелка = 7
вилка = 1	чайник = 8	

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}52\\12\end{array} \\ \hline -\begin{array}{r}624\\312\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r}312\\462\end{array} \\ \hline 89)\ 774\ (8 \\ -712 \\ \hline 62 \end{array}$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я называю арифметическими ребусами, — занимательная игра американских школьников: отгадывание задуманного слова решением задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, — например, «трудолюбие», «специально» «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

просвещать
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *провес*, 123564
делитель — *овса*, 3548

$$\begin{array}{r|l} 123564 & 3548 \\ \cline{2-2} 10644 & 79 \\ \hline 17124 & \\ 14192 & \\ \hline 2932 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{провес} & \text{овса} \\ \cline{2-2} \text{пьесс} & \text{ос} \\ \hline \text{пщпрс} & \\ \text{псптр} & \\ \hline \text{ртор} & \end{array}$$

Можно взять и другие слова:

восстать | *свет*
свет | *ппета*
щщвт
свет
оптьа
рщспс
сстст
спп рп
оарaь
оеввр
пщра

делимое — *восстать*, 53449890
делитель — *свет*, 4569

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому, на первый взгляд бессмысленному, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, — читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

т р у д о л ю б и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *блюдо*, 86745
делитель — *труд*, 1234

блюдо | *труд*
блуб | *юс*
уло

то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще два или три десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

с п е ц и а л ь н о
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *палец*, 26734
делитель — *пила*, 2576

палец | *пила*
пила | *со, ел*
нлцо
ллпь
поспо
сьоеп
поьь

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (*со*), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Что касается слов, пригодных в качестве «ключа» для подобных ребусов, то выбор их не так беден, как может казаться; кроме прежде указанных, можно использовать слова:

республика *пятидневка*
демократия *струбцинка*

Годятся и собственные имена, например *Шопенгауэр*. Как далеко может итти изобретательность в этом направлении, показывает следующий пример. Один из читателей, тов. П. Б. Горцев (Ростов-на-Дону) прислал мне остроумно составленный арифметический ребус, разгадка которого представляет собою... лозунг для пропаганды идеи межпланетных путешествий. Ребус состоит из трех частей, последовательно развертывающих этот близкий мне лозунг. Вот они:

```
        I                      II                     III

тайник | рык           булат | нел          зарево | трюм
анн    |-----          неп   |-----         трюм   |-----
----   | еваи          ---   | пуо          ----   | эт
ркен                   ннпа                  юррюо
ратн                   нсеу                  оиоре
----                    ----                 -----
  вй и                  аент                   еом
  тн е                  апео
  ----                  ----
  р екк                 абу
  рр ик
  -----
     нй
```

Читатель, который пожелает разгадать этот тройной (и весьма нелегкий) ребус, узнает в итоге, что

I	II	III
Реактивный	*планетобус*	*завоюет мир*

Предлагаю далее читателю самостоятельно разгадать следующий ряд ребусов, придуманный тем же П. Б. Горцевым.

Задача № 3

Обыкновенно в арифметических ребусах только делимое и делитель являются осмысленным сочетанием букв. В предлагаемом случае имеет известный смысл и частное. Это бывает крайне редко. К тому же все три слова относятся здесь к одному кругу понятий — они характеризуют бесславный конец царствования последнего Романова («мамой» Распутин называл царицу Александру Фёдоровну).

Читателю предлагается разгадать «ключ» этого ребуса.

```
распутин |спирт
 пирт    |мама
маравт
ммпрут
   рстти
   спирт
   мсмнин
   ммпрут
     нмкун
```

Задача № 4

```
кризис |этан
этан   |вет
 зиеи
 иека
 эссис
 ээзки
  эпее
```

Задача № 5[1]

```
театр |киль
киль  | рк
рткпр
рроеь
  коир
```

Задача № 6

```
персик |бал
сбпе   |бкп
 улри
 упбс
  еуук
  епеи
   рср
```

Решения этих ребусов — см. на стр. 31.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в такой области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится, — именно, при хранении книг в библиотеке.

Существует такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер в любой библиотеке. Это так называемая «десятичная система классификации книг».

Система эта чрезвычайно удобна и весьма несложна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого номера сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги, согласно этой международной десятичной классификации, прежде всего разбиваются на десять обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

[1] Хотя в этой задаче ключ состоит из 12 букв и включает в себя повторяющиеся буквы, тем не менее задача вполне разрешима.

0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. Религия (у нас — история религий и антирелигиозный отдел).
3. Общественные науки. Право.
4. Филология. Языки.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История, география, биографии.

В обозначении номера книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к тому или иному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет номер, начинающийся с 1, по математике — с 5, по технике — с 6. И наоборот, если номер начинается, например, с 4, то, не видав книги, мы можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из десяти перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, обозначенных цифрами; эти цифры ставят в обозначении номера на втором место. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественно-научные книги, разделяется на следующие отделы.

50. Общие сочинения по физико-математическим и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Механика теоретическая.
54. Химия. Минералогия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы прикладных наук (6); отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6, т. е. числом 61; по сельскому хозяйству — 63, по домоводству 64; торговле и путям сообщения — 65, химической промышленности и технологии — 66 и т. п. Точно так же в 9-м классе все книги по географии и путешествиям относятся к отделу 91, и т. п.

Присоединение к двум первым цифрам третьей характеризует ее содержание еще точнее, указывая, к какому именно подотделу данного отдела она относится. Например, в отделе математики (51) присоединение на третьем месте цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике (511), цифры 2 — к алгебре (512), цифры 3 — к геометрии (513) и т. д. Точно так же и отдел физики (53) разбивается на 10 подотделов: книги по электричеству обозначаются 537, по свету — 535, по теплоте — 536 и т. д.

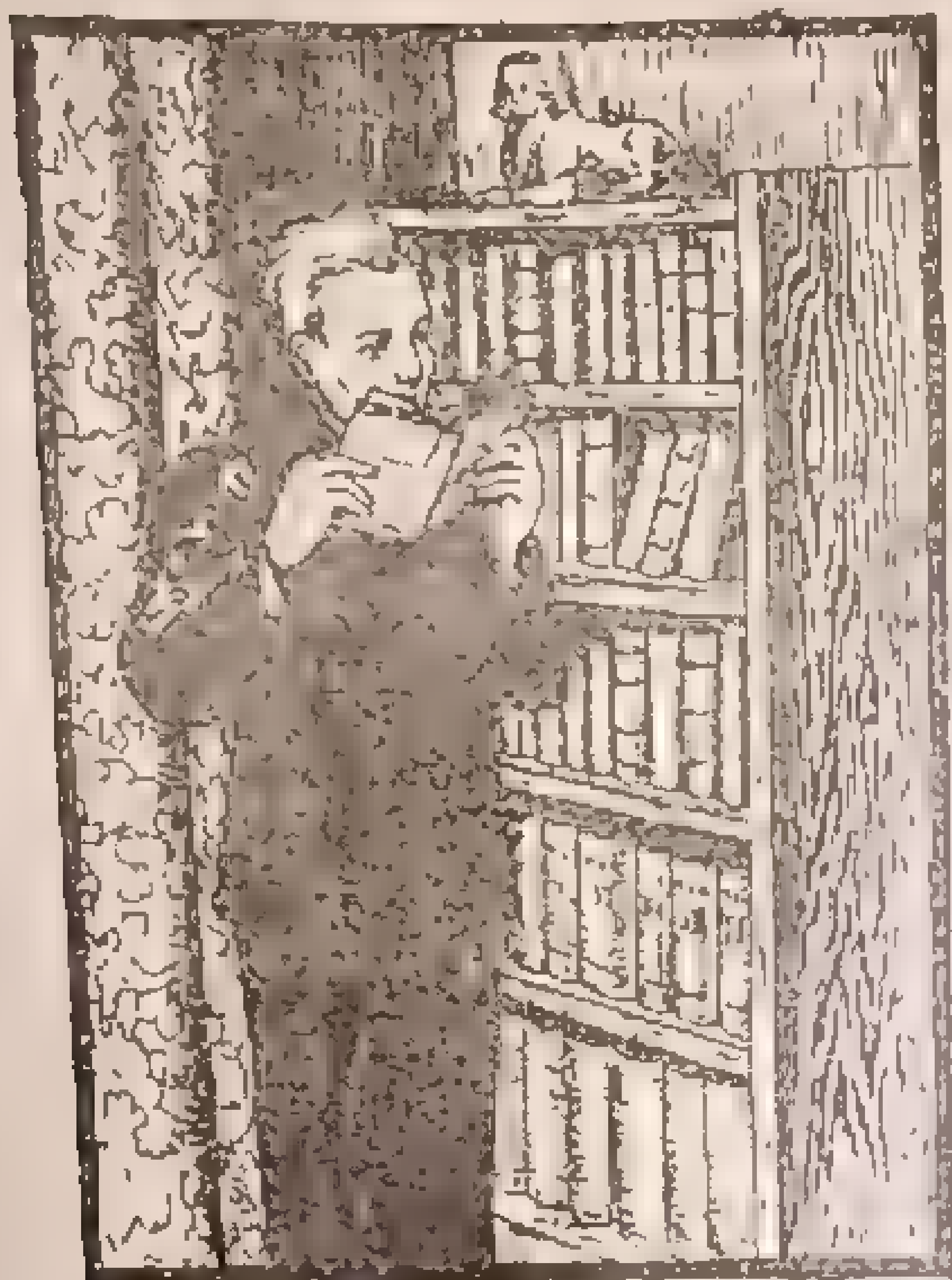


Рис. 5. «Отыскание книги упрощается»...

Затем следует дальнейшее дробление подотдела на разряды, обозначаемые четвертой цифрой номера, и т. д.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, отыскание нужной книги упрощается до крайности. Если, например, вы интересуетесь геометрией, то прямо идете к шкафам, где номера начинаются с 5, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги № 51..., и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги № 513... Здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Точно так же, ища книги по социализму и коммунизму, вы обратитесь к книгам №№ 333..., не заглядывая в каталог и никого не затрудняя расспросами.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться недостатка в числах для нумерации книг.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ У РАЗНЫХ НАРОДОВ

Принято думать, что арифметические знаки до известной степени интернациональны, что они одинаковы у всех народов европейской культуры. Это верно лишь по отношению к большинству знаков, но не ко всем. Знаки + и —, знак × и : употребляются в одинаковом смысле и немцами, и французами, и англичанами. Но точка, как знак умножения, применяется не вполне тождественно разными народами. Одни пишут 7.8, другие — 7 · 8, поднимая точку на середину высоты цифр. То

же приходится сказать о знаке дробности, т. е. о знаке, отделяющем десятичную дробь от целого числа. Одни пишут, как мы, 4,5, другие 4 . 5, третьи 4 · 5, помещая точку выше середины. Англичане и американцы совсем опускают нуль перед десятичной дробью, чего на континенте Европы никто не делает. В американской книге вы встречаете такие обозначения, как .725 или ·725, или даже ,725,— вместо нашего 0,725.

Расчленение числа на классы обозначается также не однообразно. Одни народы разделяют классы точками (15.000.000), другие — запятыми 15,000,000. У нас привился разумный обычай не ставить между классами никакого знака, а оставлять лишь пробел (15 000 000).

КРУГЛЫЕ ЧИСЛА

Вероятно все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем особенное пристрастие. Мы например очень любим «круглые числа», т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. Пристрастие к определенным числам, предпочтение их другим, заложено в человеческой натуре гораздо глубже, чем обыкновенно думают. В этом отношении сходятся вкусы не только европейцев и их предков,— например древних римлян, — но даже многих первобытных народов других частей света.

При каждой переписи населения обычно наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно бы быть. Причина кроется конечно в том, что люди не помнят твердо, сколько им лет, и, показывая возраст, невольно «округляют» свои годы. Замечательно, что подобное же преобладание «круглых» возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Один германский психолог (проф. К. Марбе) подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древне-римских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по переписи в американском штате Алабама, где живут преимущественно негры. Получилось удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до подробностей сходятся в числовых пристрастиях! Конечные цифры возраста, по частоте их повторяемости, располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно.

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал множеству лиц определить «на глаз», сколько миллиметров заключает в себе полоска бумаги, например в палец длиною, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Нельзя считать случайностью, что народы, столь отдаленные друг от друга и антропологически и географически, обнаруживают полную одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к «круглым» числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам некруглым.

Любовь к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т. е. с числом пальцев на обеих руках.

Пристрастие к округленным числам обходилось нам прежде, когда на рынке господствовал частник, довольно дорого. Тогда цены в розничной продаже тяготели к круглым числам: некруглое число, получающееся при исчислении продажной стоимости товара, дополнялось до большего круглого числа. Округленность цены достигалась обычно за счет покупателя, а не продавца. Общая сумма, которую потребители переплачивали за удовольствие приобретать товары по круглым ценам, накоплялась весьма внушительная. Один русский математик приблизительно подсчитал ее, и оказалось, что население прежней России ежегодно переплачивало в виде разницы между круглыми и некруглыми товарными ценами — 30 миллионов рублей. Изрядная дань невинной слабости к округлениям!

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$$100 = \begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 \\ 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 \\ 123 + 4 - 5 + 67 - 89 \\ 123 + 45 - 67 + 8 - 9 \\ 123 - 45 - 67 + 89 \\ (1 + 2 - 3 - 4)\ (5 - 6 - 7 \quad 8 - 9) \end{cases}$$

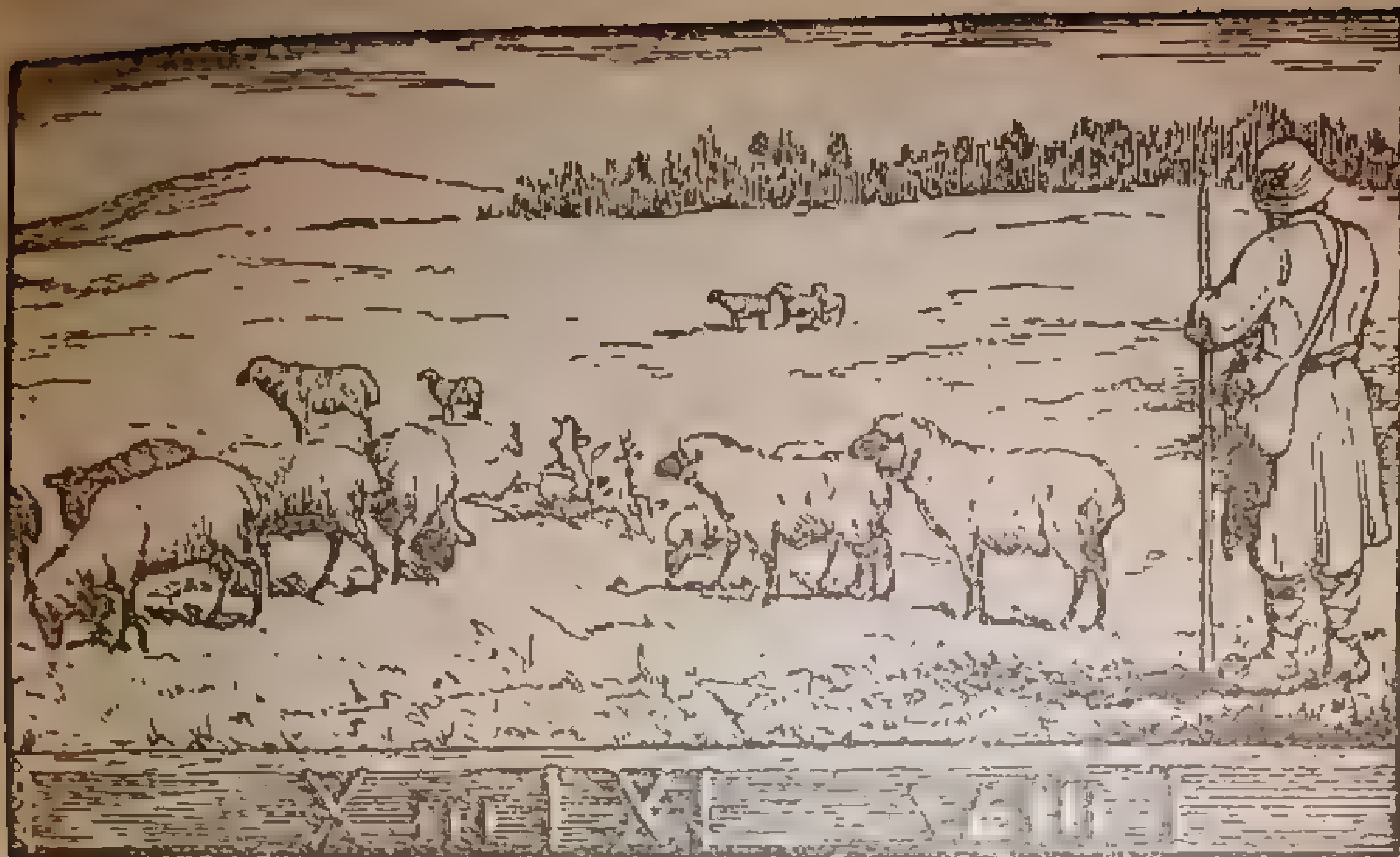


Рис. 6. Народный способ записи числа голов в стаде, вверенном пастуху (см. обозначение внизу рисунка). Запись делается на дощечке, раскалываемой затем вдоль на две части; одна вручается пастуху, другая остается у владельца стада. Совпадение записей при складывании этих частей обеспечивает обе стороны от пререканий о числе голов при возвращении стада.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПОТОМОК ДРЕВНЕГО АБАКА

ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Задача № 7

Припомним ту, в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила некогда семиклассника Зиберова из Чеховского рассказа «Репетитор».

«Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?»

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, 12-летний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

«Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

—Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка, я разделю!

Зиберов [репетитор] делит, получает 3 с остатком и быстр
стирает.

— Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенны
уравнения, а вовсе не арифметическая.

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

— Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 54
на 8? Так, что ли? Нет, не то!

— Решайте! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая, — говори



Рис. 7. «— И без алгебры решить можно, говорит — Удодов».

Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уже вы ем
Егор Алексеич.

Егор Алексеич [репетитор] берет в руки грифель и начи
нает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — гово
рит он. — Ее с иксом и игреком решить можно... Впрочем
можно и так решить. Я вот разделил... Понимаете? Или во
что. Решите мне эту задачу к завтрему... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба он
понимают замешательство учителя. Ученик VII класса ещ
пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в уго

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-неученому.»

Эта история с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новых задачи. А именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?
2. Как должен был решить ее Петя?
3. Как решил ее отец Пети на счетах «по-неученому»?

Решение

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то весьма многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим их по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача — «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось). Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$$x + y = 138 \qquad 5x + 3y = 540,$$

где x — число аршин синего, а y — черного сукна.

2. Однако, задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, — тогда за партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить $5 \times 138 = 690$ рублей; это на $690 - 540 = 150$ рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ — 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: $138 - 75 = 63$. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится очень кратко: «Он щелкает на счета
и у него получается 75 и 63, что и нужно было».

В чем однако состояло это «щелканье на счетах»?

Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счета
тем же приемом, что и на бумаге, — теми же арифметическим
действиями. Но выполнение их упрощается, благодаря пре
имуществам, которые наши русские счеты предоставляю
всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, «отставно
губернский секретарь» Удодов хорошо умел считать на счета
потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыл
ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксо
и игреком». Проследим же, какие действия должен был про
делать на счетах Петин отец.

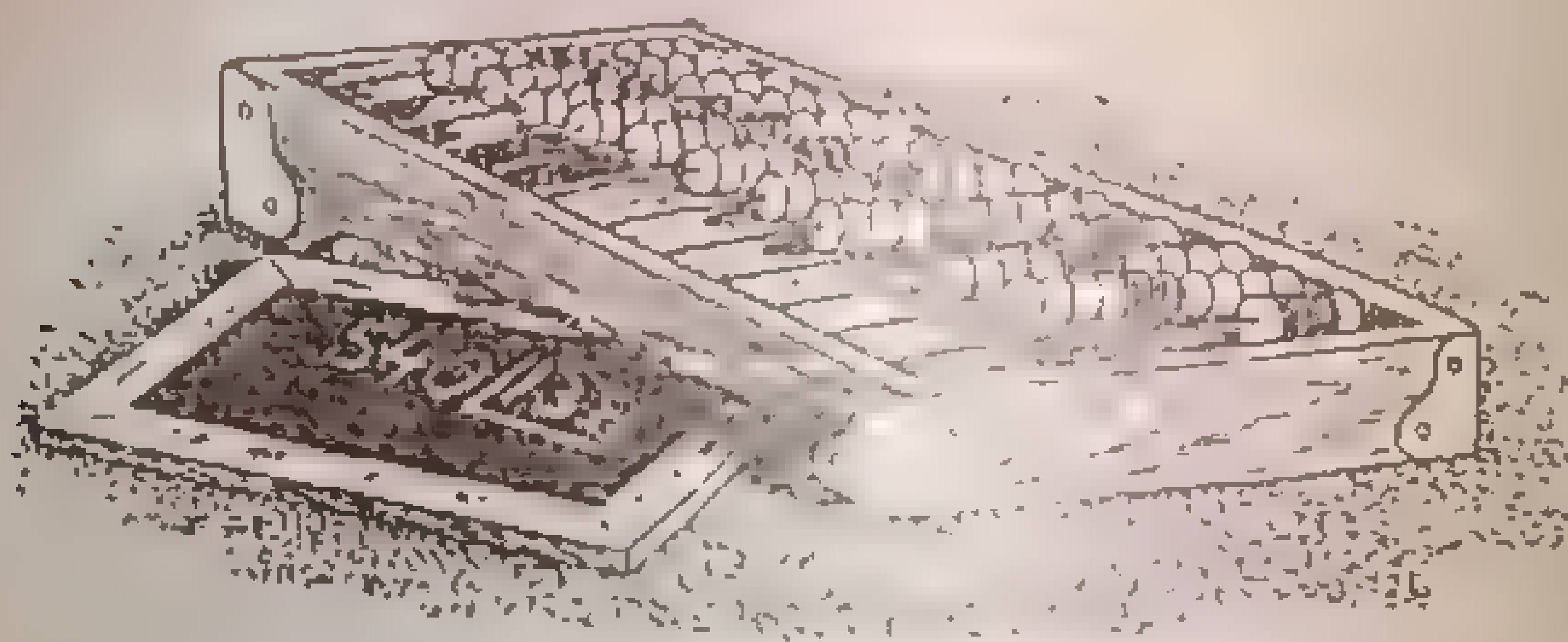


Рис. 8. Русские счеты.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножит
138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счета
умножил сначала 138 на 10, — т. е. просто перенес 138 один
рядом выше, — а затем разделил это число пополам опять
таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидываю
половину косточек, отложенных на каждой проволоке; есл
число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят и
затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки н
10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1380 пополам так: н
нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают
косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек от
кидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мыслен
10-ю нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к к
сточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну ко
сточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки.
результате на верхней проволоке совсем не остается косточе
на средней $1 + 5 = 6$ сотен, на нижней $4 + 5 = 9$ десятк

Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах, — всем известно.

Наконец, полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах конечно гораздо скорее, чем тут описано.

РУССКИЕ СЧЕТЫ

Есть много полезных вещей, которых мы не ценим только потому, что, находясь постоянно у нас под руками, они превратились в слишком обыденный предмет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты — русская народная счетная машина,



Рис. 9. Древние употребляли при вычислениях счетный прибор — «абак».

представляющая собою видоизменение знаменитого «абака» или «счетной доски» наших отдаленных предков.

Древние народы — египтяне, греки, римляне — употребляли при вычислениях счетный прибор «абак». Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счетов. Та-

кой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки. Родствен абаку перуанский «квипос» — ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами; этот счетный прибор получил особенное распространение среди первых обитателей Южной Америки, но без сомнения был в употреблении также и в Европе (см. далее: «Отголоски старины»). В средние века вплоть до XVI в. подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но теперь видоизмененный абак — счеты — сохранился кажется только у нас, да на азиатском Востоке — в Китае (семикосточковые счеты — «суан-пан»[1]) и Японии (тоже семикосточковые счеты — «соробан»). Каждый грамотный человек умеет там выполнять на таких счетах четыре арифметических действия. Между тем Запад почти не знает счетов, — вы не найдете их ни в одном магазине Европы, и только в начальных школах имеются огромные счеты — наглядное классное пособие при обучении нумерации. Быть может потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, а смотрим на него как на наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов. Японцы ценят свои счеты высоко. Вот как отзывается о соробане один японский ученый: «Несмотря на свою древность, соробан превосходит все современные счетные приборы легкостью обращения с ним, простотою устройства и дешевизною».



Рис. 10. Семикосточковые счеты, распространенные в Китае и Японии.

Мы тоже в праве были бы гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они по достигаемым на них результатам могут соперничать в не-

[1] Суан-пан изготовляются всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня имеется китайский суан-пан-брелок в 17 *мм* длины и 8 *мм* ширины). Употребляются также и 6-косточковые счеты: 5 косточек по одну сторону планки, одна — по другую. (На имеющемся у меня образчике таких счетов 21 ряд косточек.)

которых отношениях даже со сложными, дорого стоящими счетными машинами. В умелых руках этот нехитрый прибор делает порою настоящие чудеса. Один специалист, заведывавший до революции крупной русской фирмой по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших в его контору образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддиционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний — правда, большой мастер своего дела, — брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и укладывал свою машину в чемодан, не надеясь продать у нас ни одного экземпляра.

— К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счетов! — говорили нередко представители иностранных фирм.

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Нынешние счетные машины конечно оставляют далеко позади наши счеты. Но во многом — например в сложении и вычитании — счеты могут соперничать со сложными приборами. Впрочем в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий. Познакомимся с некоторыми из них.

УМНОЖЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий умеющий быстро *складывать* на счетах сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры *умножения*.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, — т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 помощью счетов — мы уже объяснили выше, на стр. 24).

Вместо умножения на 6 умножают на 5 и прибавляют умножаемое. Вместо умножения на 7, множат на 10 и отнимают умножаемое три раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на 10 минус два. Точно так же множат на 9: заменяют умножением на 10 минус один.

При умножении на 10 переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель вероятно уже сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10, и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить 10 + 1. Множитель 12 заменяют 10 + 2, или практически 2 + 10, т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется 10 + 3 и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20 = 10 \times 2$	$32 = 22 + 10$
$22 = 11 \times 2$	$42 = 22 + 20$
$25 = (100 : 2) : 2$	$43 = 33 + 10$
$26 = 25 + 1$	$45 = 50 - 5$
$27 = 30 - 3$	$63 = 33 + 30$ и т. д.

Легко видеть между прочим, что помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55, и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда конечно можем умножить помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения — это все же дает некоторое сокращение времени.

ДЕЛЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Выполнять помощью конторских счетов деление гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (стр. 24),— способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 0,333... (известно, что $0,333... = \frac{1}{3}$). Умножать помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется помощью счетов чересчур сложно, и потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2 и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что $\frac{1}{9} = 0,1111...$ Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать 0,1 делимого + 0,01 его и т. д.[1]

Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5 — и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях. Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая иногда «для памяти» узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения. Это — «веревочный абак».

[1] Этот прием полезен и для устного деления на 9.

Однократно завязанный узел на веревке означал 10, двукратно — 100, троекратно — 1000 и т. д.

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает скамья. Что же общего между финансовым учреждением — «банком» в современном смысле слова — и скамьей? Оказывается, здесь далеко не простое совпадение названий. Абак в форме скамьи был широко распространен в торговых кругах Германии в XV—XVI веках; каждая меняльная лавка или банковская контора прежде всего характеризовалась присутствием «счетной скамьи», — естественно, что скамья стала синонимом банка.



Рис. 11. Счетный прибор древних перуанцев — «квипос». Отголоском пользования этим веревочным прибором является нынешний обычай завязывать для памяти уголки на носовом платке.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно английского происхождения и производится от глагола «чекер» (checker) — графить; «чекеред» (графленый) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI—XVII веке английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было, в сокращенном виде, самое название этих счетных приборов: от слова «чекеред» произошло слово «чек».

Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бо-

бах», которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно также относится к тому времени, когда все денежные расчеты производились на абаке, на счетном столе или скамье, помощью б о б о в, заменявших косточки наших счетов. «Один считает на камешках, другой — на бобах», читаем у Кампанеллы в «Государстве Солнца» (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша, — отсюда и соответствующий оборот речи.

Решения арифметических ребусов, предложенных на стр. 15—16

№ 3 *Манускрипт* № 5 — *Ракетомобиль*

№ 4 *Экспертиза* № 6 — *Республика*



Рис. 12. Деление чисел по старинному способу «галеры». «Фигура выкладывается из чисел так, что она представляется в виде галеры с кормой и носом, мачтою, парусами и веслами» — писал математик XVI века Тарталья.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

НЕМНОГО ИСТОРИИ

„ТРУДНОЕ ДЕЛО — ДЕЛЕНИЕ"

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, скольких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату. Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления — последнее всего больше. «Умноженье —

мое мученье, а с делением — беда» — говорили в старину. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления — приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения — «шахматами, или органчиком», «загибанием», «по частям, или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником», «кубком или чашей», «алмазом» и прочие,[1] а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. «Трудное дело — деление» (dura cosa e la partita) гласила старинная итальянская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление «лодкой или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья (XVI век) в своем обширном учебнике арифметики писал об этом способе следующее:

«Второй способ деления называется в Венеции[2] лодкой или галерой, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других —

[1] Перечисленные приемы умножения указаны в старинной «Арифметике» Николая Тартальи. Наш современный способ умножения описывается там под названием «шахматного».

[2] Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV—XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради коммерческих надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.

на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями — выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами.»



Рис. 13. Заставка из «Арифметики» Магницкого (изд. 1703 г.) Рисунок изображает «храм мудрости». Мудрость сидит на престоле, на ступенях которого перечислены арифметические действия. На колоннах перечислены те теоретические и прикладные науки, в которых арифметика находит себе применение: геометрия, стереометрия, астрономия, оптика (знания, добываемые «тщанием»), меркатория, т. е. картография, география, фортификация, архитектура (добываемые «учением»). Надпись внизу поясняет: «арифметика что деет, на столпах то все имеет».

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный математик и рекомендует этот способ как «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел»,— я не решаюсь его из-

ложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше. Между тем этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху. У нас он употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Леонтия Магницкого[1] он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги — 640 страниц большого формата — Магницкий пользуется исключительно «способом галеры», не употребляя впрочем этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:

```
                      4 | 6
                     ---+---
     88               1 | 3            08
    0999               09               199
    1660               19              0860
    88876             0876             08877
    099994800000019948000000199994
    166666000000086660000000866666
Делимое — 888888000000088880000000888888(88 — частное
Делитель² — 99999000000009990000000099999
              999990000000099900000000099
```

МУДРЫЙ ОБЫЧАЙ СТАРИНЫ

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай проверять каждое выполняемое арифметическое действие — похвальное правило, которому не мешало бы и нам следовать.

---

[1] Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы, известные в ту эпоху (включая и сведения из мореходной астрономии). Это — одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал «вратами своей учености». Подробное заглавие ее таково:

«Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества бога слова 1703».

[2] Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления

Любимым приемом поверки был так называемый «способ девятки». Этот изящный прием нередко описывается и в современных арифметических учебниках, особенно иностранных.

Поверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же, остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также,[1] что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает 2, и то же получается в остатке от деления $(7+5+8)$ на 9. Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему поверки девяткой, т. е. делением на

9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность **с л о ж е н и я** следующего столбца:

38932	7
1096	7
+ 4710043	1
589106	2
5339177	8

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно двузначных числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр) пока, в конечном результате, не получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки ($7+7+1+2=17$; $1+7=8$), — получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно: $5+3+3+9+1+7+7$, после всех упрощений, равно 8.

Поверка **в ы ч и т а н и я** выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность — за слагаемые. Например:

− 6913	1
2587	4
4326	6

$4+6=10$; $1+0=1$.

[1] Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9.

Особенно удобен этот прием в применении к проверке действия умножения, как видно из следующего примера:

```
 8713.......×  1
×264.......   3
────          ─
 34852         3
52278
17426
────
2300232......  3
```

Если при такой проверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, где именно кроется ошибка, можно поверить способом девятки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, остается поверить лишь сложение частных произведений.

Как по этому способу проверять деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком, пользуются тем, что делимое = делителю × частное + остаток.

Например:

$$16201387 : 4457 = 3635; \text{ остаток } 192$$

сумма цифр: 1 2 8 3

$$2 \times 8 + 3 = 19; \; 1 + 9 = 10; \; 1 + 0 = 1.$$

Привожу из «Арифметики» Магницкого предлагаемое там для проверки девяткой удобное расположение:

Для умножения:

```
×365          5
   24 «Сие 3 ──┼── 3 сему согласно, убо добре есть»
 1460          |
 730           6
 8760         ──
              30
```

Для деления:

	Частного	
	8	
Делимого	1 — 1	«Согласно добре дели»
Делителя	2	
	16	
Остатка	3	
Всех	1	

Подобная поверка действий, без сомнения, не оставляет желать лучшей в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при такой поверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием поверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одной лишь поверкой помощью девятки, но производили еще дополнительную поверку — чаще всего помощью семерки. Этот прием основан на том же «правиле остатков», но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой поверки). Две поверки — девяткой и семеркой — являются уже гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратная числа $7 \times 9 = 63$. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная поверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или 2 единицы, можно ограничиться только поверкою девяткой. Дополнительная поверка семеркой чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

ХОРОШО ЛИ МЫ МНОЖИМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, — но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, и наш способ не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений укажем пока только одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на первую цифру множителя. Выполненное на стр. 37 умножение 8713 × 264 примет при этом такой вид:

```
×  8713
    264
--------
 17426
  52278
   34852
--------
 2300232
```

Как видим, последнюю цифру каждого частного произведения подписывают под той цифрой множителя, на которую умножают.

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые, наиболее ответственные цифры результата, получаются в начале действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку меньшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого «сокращенного» умножения, о котором здесь мы распространяться не можем.)

«РУССКИЙ» СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел, — хотя бы даже двузначных, — если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной «Арифметике» Магницкого, о которой мы уже упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких — чуждых для современного слуха — стихах:

Аще кто не твердит
  таблицы и гордит,
Не может познати
  числом что множати
И во всей науки,
  несвобод от муки,
Колико не учит
  туне ся удручит
И в пользу не будет
  аще ю забудет.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существуют способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, непохожий на наши школьные приемы, употребителен в обиходе великорусских крестьян и унаследован ими от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа.

Вот пример:

32 × 13
16 × 26
8 × 52
4 × 104
2 × 208
1 × 416

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

Задача № 8

Однако, как поступить, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо,— гласит правило,— в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет п р и б а в и т ь все те числа этого столбца, которые стоят против н е ч е т н ы х чисел левого столбца: сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочки указывают, что данную строку надо зачеркнуть):

19 × 17
9 × 34
4 × 68*
2 × 136*
1 × 272

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат: $17 + 34 + 272 = 323$.

На чем основан этот прием?

Решение

Обоснованность приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$19 \times 17 = (18 + 1)\ 17 = 18 \times 17 + 17$$
$$9 \times 34 = (\ 8 + 1)\ 34 = \ 8 \times 34 + 34, \text{ и т. п.}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что сейчас описанный способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны — из Египта. Мы мало знаем, как производили арифметические действия обитатели древней Страны пирамид. Но сохранился любопытный документ — папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ древнего Египта это так называемый «папирус Ринда», относящийся ко времени между 2000 и 1700 гг. до нашей эры[1] и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким Аамесом. Писец[2] Аамес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера, — вместе с их ошибками и исправлениями учителя, — и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

> «Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей... всех тайн, сокрытых в вещах.
>
> «Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом.»

[1] Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом; он оказался заключенным в металлический футляр. В развернутом виде имеет 20 *м* длины, при 30 *см* ширины. Хранится в Британском музее, в Лондоне.

[2] Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведывании их находилось «все относившееся к строительной части храма и его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

В этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

(8 × 8)
. 8
. . 16
. . . . 32
: : : : 64

(9 × 9)
. 9 +
. . 18
. . . . 36
: : : : 72 +

Итог . . . 81

(8 × 365)
. 365
. . 730
. . . . 1460
: : : : 2920

(7 × 2801)
. 2801 +
. . 5602 +
. . . . 11204 +

Итог . . 19607

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны пирамид в современную эпоху. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19×17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17,

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, т. е. $17 + 34 + 272$. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат: $17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17$. Легко видеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему «крестьянскому» (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли наших крестьян был в ходу такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Германии крестьяне кое-где хотя и пользуются им, но также называют его «русским».

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли сейчас где-нибудь этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое.[1]



Рис. 14. Существуют приемы счета, проникшие в русскую деревню из древнего Египта.

Следовало бы вообще с большим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины.

На это давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятни-

[1] Автор был бы весьма признателен за письменные сообщения (по адресу, указанному в предисловии).

ков народной математики. Нелишним будет, пожалуй, привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать: 1) счисление и счет, 2) приемы меры и веса, 3) геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях, 4) способы межевания, 5) народные задачи, 6) пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям, 7) памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$91 + \frac{5823}{647} = 100$$

$$94 + \frac{1578}{263} = 100$$

$$96 + \frac{1428}{357} = 100$$

Моя Биография

Я окончил курс Университета 44-х лет от роду.
Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-
летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет, —
способствовала тому, что мы жили общими интересами и меч-
тами. Спустя несколько лет, у меня была уже и маленькая семья из
10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из
которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с деть-
ми жили на 130 руб. в месяц. Но так было в начале: [illegible]
[illegible] мое материальное положение улучшилось [illegible]
[illegible] все подробности и [illegible] неужели не [illegible]
[illegible] Как малень-
[illegible] только смеялся на подобные замечания.

Рис. 15. Загадочная автобиография чудака-математика. Разгадайте ее.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей старого распространенного журнала [1] в качестве «задачи на премию». Вот она:

Задача № 9

«Загадочная автобиография»

«В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими строками:

«Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общи-

[1] «Природа и люди» (потом она была перепечатана мною в сборнике Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

ми интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $^1/_{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц» и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?»

Решение

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: «спустя год (после 44 лет) 100-летним молодым человеком...» Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4 — **наибольшая** в этой системе (как 9 — в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по **пятиричной системе счисления**, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором — не десятки, а пятерки; на третьем не сотни, а «двадцатипятерки» и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки «44», означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, т. е. двадцать четыре. Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятиричной системе, т. е. 25. Остальные числа записки соответственно означают:

$$«34» = 3 \times 5 + 4 = 19$$
$$«11» = 5 + 1 = 6$$
$$«200» = 2 \times 25 = 50$$
$$«10» = 5$$
$$«^1/_{10}» = {}^1/_5$$
$$«130» = 25 + 3 \times 5 = 40$$

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет:

Я окончил курс университета 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте —

всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал в месяц всего 50 рублей, из которых $\frac{1}{5}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 руб. в месяц.

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятиричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда:

$$119 : 5 = 23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятиричной системе — 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцатипятерок») — 1.

Итак, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, или в пятиричной системе «434».

Сделанные действия для удобства располагают так:

119	5	
4	23	5
	3	*4*

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево, и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.

Задача № 10

Изобразить 47 в троичной системе:

Решение

47	3		
2	15	3	
	0	5	3
		2	*1*

Ответ: «1202». Поверка: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 9 + 2 = 47$.

Задача № 11

Число 200 изобразить в семеричной системе.

Решение

```
 200 | 7
     |-----
  14 | 28 | 7
-----+----+----
  60   0  | 4
  --
   4
```

Ответ: «404». Поверка: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$.

Задача № 12

Число 163 изобразить в двенадцатиричной систем:

Решение

```
 163 | 12
     |------
  43 | 13 | 12
-----+----+----
   7    1 | 1
```

Ответ: «117». Поверка: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Теперь читатель не затруднится изобразить любое чис в какой угодно системе счисления. Единственная помеха мо- жет возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых слу- чаях не будет доставать обозначений для цифр. В самом деле: при изображении числа в системах с основани более десяти (например, в двенадцатиричной), может явиться надобность в цифрах «десять» и «одиннадцать». Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для новых циф какие-нибудь условные знаки или буквы, — хотя бы, напри- мер, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте. Так, число 1579 в двенадцатиричной систем изобразится следующим образом:

```
 1579      | 12
           |------
  12        131 | 12
 ----      -----+-----
   37        11   10
   --
   19
   --
    7
```

Ответ: «(10)(11)7», или КЛ7. Поверка: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

Задача № 13.

Выразить число 1926 в двенадцатиричной системе.[1]

Задача № 14.

Выразить число 273 в двадцатиричной системе.[2]

ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в десятичной системе высшая цифра 9, в шестиричной — 5, в троичной — 2, в пятнадцатиричной — 14, и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятиричной — 5 цифр, в троичной — 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной — только 2 цифры (1 и 0). Существует ли и «единичная» система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в один раз больше единицы низшего, т. е. равны ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют одинаковое значение. Это самая примитивная «система»; ею пользуется первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации — так называемого поместного значения цифр. Действительно: в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза (2 × 2) больше, чем на первом, а на 5-м — в 16 раз больше (2 × 2 × 2 × 2). Для изображения какого-нибудь числа по «единичной» системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов нужно сто знаков, в двоичной же — только семь («1100100»), а в пятиричной — всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой»; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается,

[1] Ответ «1146».

[2] Ответ НН, где через Н обозначена цифра «13».

не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи единицы и нуля можно изобразить все бесконечное множество чисел! На практике система эта мало удобна — получаются слишком длинные числа;[1] но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без обмана».

НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА

Задача № 15.

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятиричной системе:

$$+\begin{array}{r}«4203»\\ «2132»\\ \hline\end{array}$$ (по пятиричной системе)

Решение

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т. е. справа: 3 + 2 равно пяти; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятиричной системе не существует: пять есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а пять, т. е. 1-цу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, 0 + 3 = 3, да еще 1-ца, удержанная в уме, — всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем 2 + 1 = 3. В четвертом 4 + 2 равно шести, т. е. 5 + 1; пишем 1, а 5, т. е. 1-цу высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма = 11 340.

$$+\begin{array}{r}«4203»\\ «2132»\\ \hline «11340»\end{array}$$ (в пятиричной системе)

[1] Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переводя изображенные в кавычках числа в десятичную систему.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель, при желании, может увеличить самостоятельно:

Задача № 16	*Задача № 17*	*Задача № 18*
По пятиричной системе: «2143» − «334»	«213» × «3»	«42» × «31»

Задачи № 19 и № 20		*№ 21 и № 22*
По троичной системе: «212» + «120» + «201»	«122» × «20»	«220» : 2 = «201» : 12 =

Ответы: № 16—«1304». № 17—«1144». № 18—«2402». № 19—«2010». № 20—«10210». № 21—«110». № 22—«10», остаток «11».

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в пятиричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Помощью этой таблички мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятиричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Задача № 23

Составить и таблицу умножения («Пифагорову») для пятиричной системы.

Решение

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятиричной системе, — как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например, при умножении

по пятиричной системе: $\times \begin{array}{r} «213» \\ «3» \\ \hline «1144» \end{array}$

рассуждаем так: трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем, 1 — в уме. Один на 3 дает 3, да еще один, — пишем 4. Дважды три = «11»; 1 — пишем, 1 — переносим влево. Получаем в результате «1144».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например для троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения для троичной системы

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова таблица для троичной системы:

1	2
2	11

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действия. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для двоичной системы:

Таблица сложения для двоичной системы:

0	1
1	10

Таблица умножения для двоичной системы:

$1 \times 1 = 1$

При помощи таких-то простых «таблиц» можно выполнять в двоичной системе все четыре действия! Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения; умножения же на «10», «100», «1000» (т. е. на 2, 4, на 8) сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нолей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно — что в двоичной системе $1 + 1 = 10$. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длиннота чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий. Пусть требуется например умножить:

В двоичной системе

$$
\begin{array}{r}
\times \quad «1001011101» \\
110101» \\
\hline
«1001011101» \\
+ \quad «1001011101» \quad \\
«1001011101» \quad\quad \\
\hline
«101011101110001»
\end{array}
$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньших умственных усилий, чем умножение тех

же чисел в десятичной системе ($605 \times 37 = 22385$). Если бы у нас была принята двоичная система, изучение письменного счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато — наибольшего количества бумаги и чернил). Однако, в устном счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

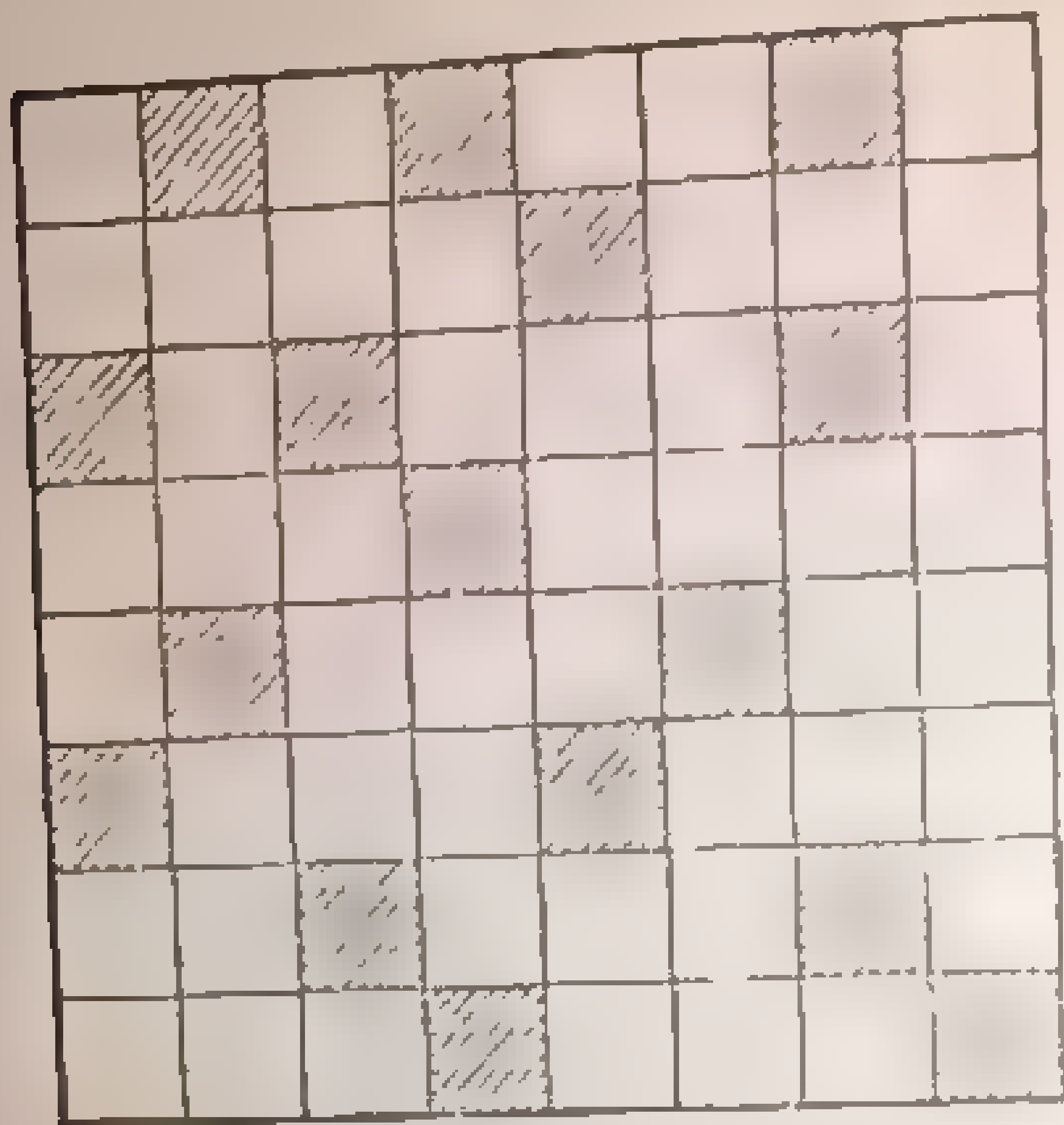


Рис. 16. Решетка для секретной переписки. Такой решеткой пользовались раньше подпольщики.

Двоичная система счисления находит неожиданное применение в системе тайнописи помощью так наз. «решетки». Я не останавливаюсь здесь на этом подробнее, потому что посвятил той же теме отдельную главу в другой моей книге «Живая математика» (гл. «Секретная переписка подпольщиков»).

ЧЕТ ИЛИ НЕЧЕТ?

Задача № 24

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно — четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например, четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то вы в праве утверждать, что число это — четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе — можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Решение

Оказывается нет. Если основание, например, семь, то «16» означает $7 + 6 = 13$, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число $+ 6$ есть тоже нечетное число).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для десятичной системы счисления, для других же — не всегда. А именно, он верен только для систем счисления с четным основанием: шестиричной, восьмиричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с нечетным основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить

его: сумма цифр должна быть четной. Например, число «136» четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием: действительно, в последнем случае имеем: нечетное число[1] + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на пять? В семиричной или в восьмиричной системе число, так изображенное, не делится на 5 (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (по сумме цифр) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятиричной системе тот же признак применим для делимости на 4, а например в семиричной — на 6. Так, число «323» в пятиричной системе делится на 4, потому что 3 + + 2 + 3 = 8, а число «51» в семиричной — на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семиричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left.\begin{aligned} 121 : 11 &= 11 \\ 144 : 12 &= 12 \\ 21 \times 21 &= 441 \end{aligned}\right\}$$ во всех системах счисления (где имеются соответств. цифры).

Знакомые с начатками алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут испытать их для разных систем счисления.

ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся лишь дроби десятичные. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $^2/_7$ или $^1/_3$ нельзя. Дело представится нам однако иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в других системах счисления. Что например означает дробь «0,4» в пятиричной системе? Конечно, $^4/_5$. Дробь «1,2» в семиричной

[1] Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное), всегда дает нечетное число (напр. 7 × 7 = 49, 11 × 11 = 121 и т. п.).

системе означает $1^2/_7$. А что означает в той же семиричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее: $^3/_7+^3/_{49}=$ $=^{24}/_{49}$.

Задача № 25

Рассмотрим еще несколько недесятичных дробей без знаменателя. Чему равны

a) «2,121» в троичной системе?
b) «1,011» в двоичной системе?
c) »3,431» в пятиричной системе?
d) «2,(5)» в семиричной системе?

Ответы:

a) $2+{}^1/_3+{}^2/_9+{}^1/_{27}=2^{16}/_{27}$
b) $1+{}^1/_4+{}^1/_8=1^3/_8$
c) $3+{}^4/_5+{}^3/_{25}+{}^1/_{125}=3^{116}/_{125}$
d) $2+{}^5/_7+{}^5/_{49}+{}^5/_{343}+\ldots=2^5/_6$

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим несколько задач особого рода:

Задача № 26

По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$
\begin{array}{r}
756 \\
307 \\
+\;2456 \\
24 \\
\hline
3767
\end{array}
$$

Задача № 27

По какой системе счисления выполнено деление:

$$
\begin{array}{l}
4415400 : 4532 = 543 \\
\underline{40344} \\
34100 \\
\underline{31412} \\
22440 \\
\underline{22440}
\end{array}
$$

Ответы: № 26 — по восьмиричной.
№ 27 — по шестиричной.

Задача № 28

Напишите число сто тридцать во всех системах счисления от двойной до десятиричной включительно.

(Решение см. на стр. 83.)

Задача № 29

Чему равно число «123», если считать его написанным во всех системах счисления до девятиричной включительно? Возможно ли, что оно написано по двоичной системе? А по троичной? Если оно написано по пятиричной системе, то можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на два? Если написано по семиричной системе, то делится ли оно без остатка на шесть? Если написано по десятиричной системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

(Решение см. на стр. 103.)

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$2^5 \cdot 9^2 = 2592$

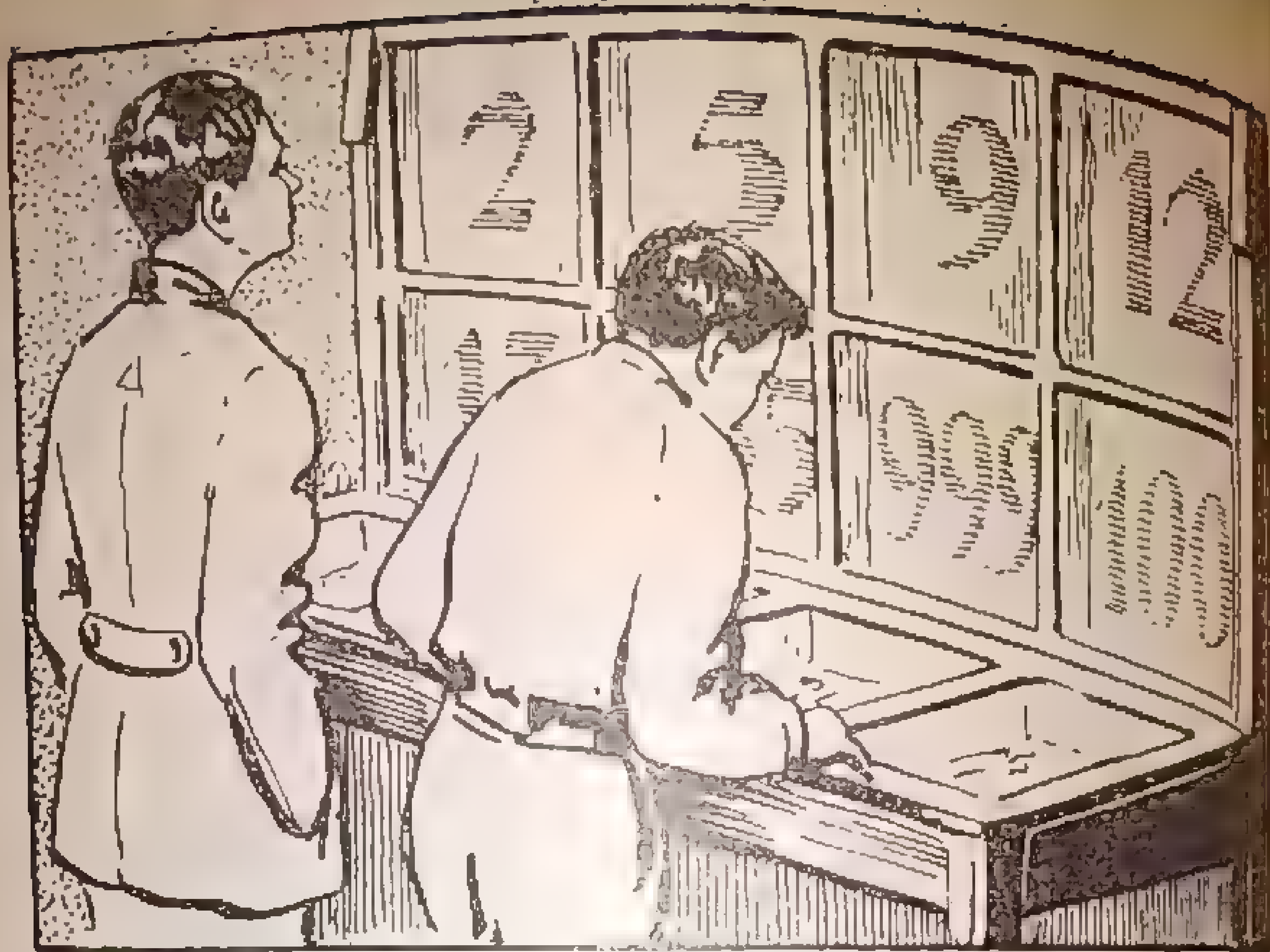
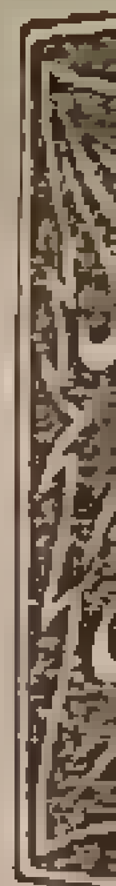


Рис. 17. Витрина числовых диковинок.



ГЛАВА ПЯТАЯ

ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа скромных размеров, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Представленные в нашей «галерее» любопытные особенности некоторых чисел не имеют ничего общего с теми воображаемыми диковинками, которые усматривают в иных числах любители таинственного. Образчиком подобных числовых суеверий может служить следующее арифметическое соображение

неосторожно высказанное знаменитым французским писателем Виктором Гюго:

«Три — число совершенное. Единица для числа 3 то же, что диаметр для круга. Среди прочих чисел 3 то же, что круг среди фигур. Число 3 — единственное, имеющее центр. Остальные числа — эллипсы, имеющие два фокуса. Отсюда следующая особенность, присущая единственно числу 3: сложите цифры любого числа, кратного 3-м, — сумма всегда делится без остатка на 3».

В этом туманном и мнимо-глубокомысленном откровении все неверно: что ни фраза, то либо вздор, либо вовсе бессмыслица. Верно только замечание о свойстве суммы цифр, но свойство это не вытекает из сказанного и к тому же не представляет исключительной особенности числа 3; им отличается, в деся-

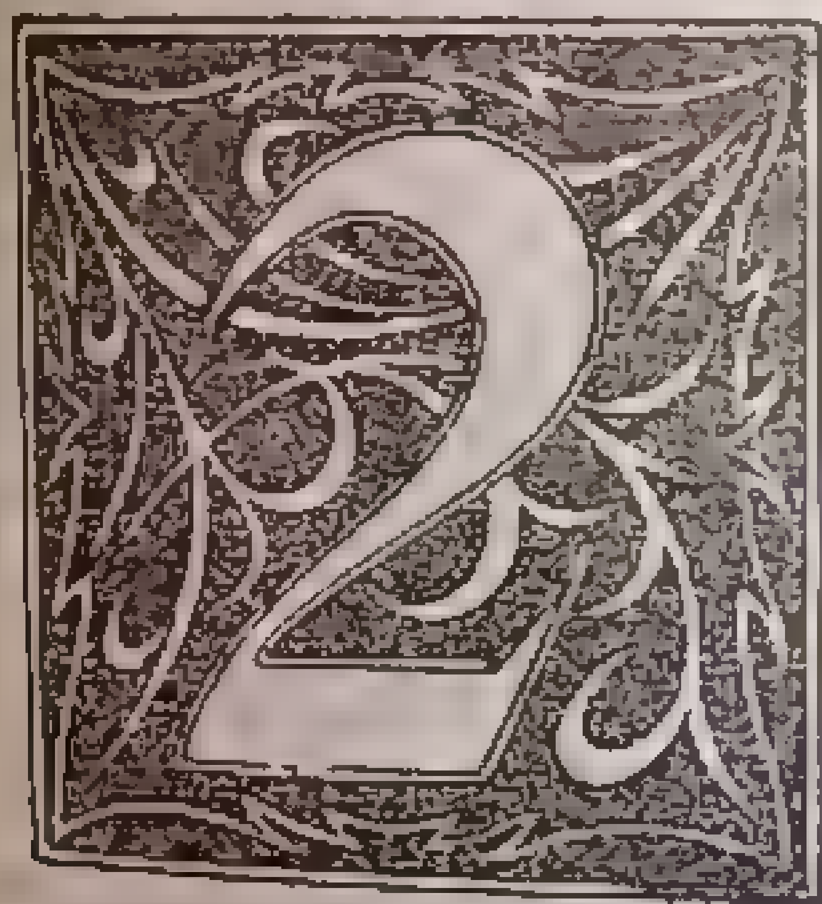


Рис. 18. Чем замечательно это число?

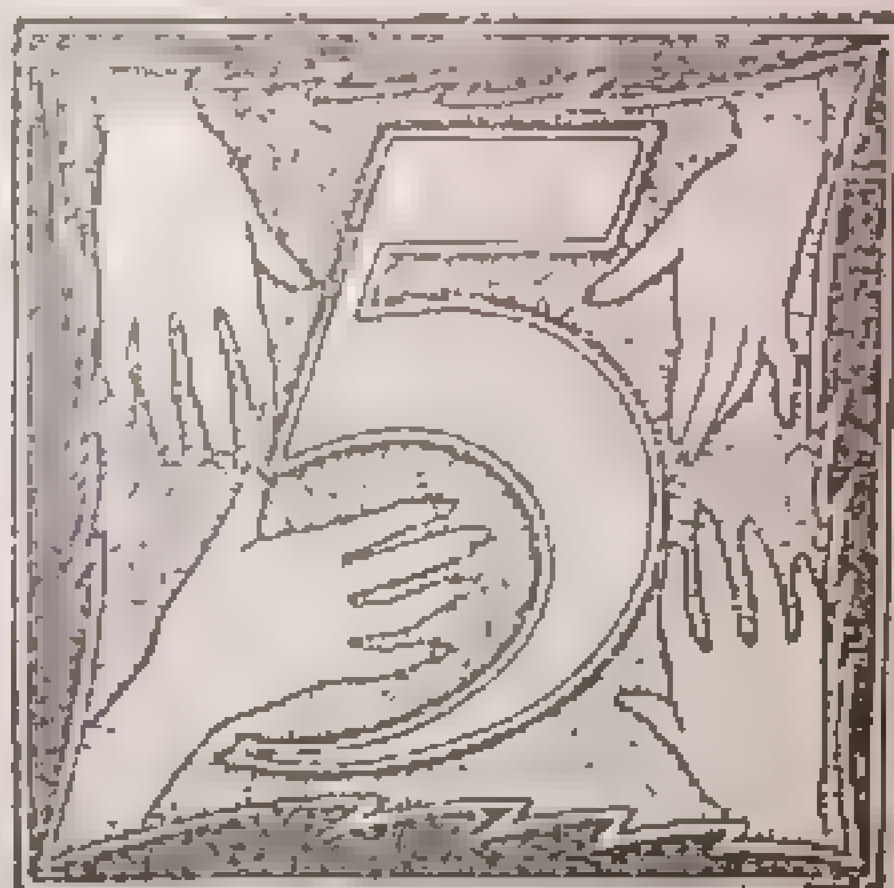


Рис. 19. Наше любимое число.

тичной системе, также и число 9, а во всех вообще системах — числа, на единицу меньшие основания.

Диковинки нашей «галереи» — иного рода: в них нет ничего таинственного или неразгаданного.

Приглашаю читателя совершить экскурсию по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам хорошо знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число,[1] а потому, что оно — основание самой любопытной системы счисления (см. стр. 53).

Не удивимся мы, встретив тут 5 — одно из наших любимей-

[1] Первым четным числом можно впрочем считать не 2, а 0.

ших чисел, играющее важную роль при всяких «округлениях», в том числе и при округлении цен, которое обходилось нам раньше так дорого (см. стр. 20). Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9, — конечно, не как «символ постоянства»,[1] а как число, облегчающее нам поверку всех арифметических действий (см. стр. 36). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим

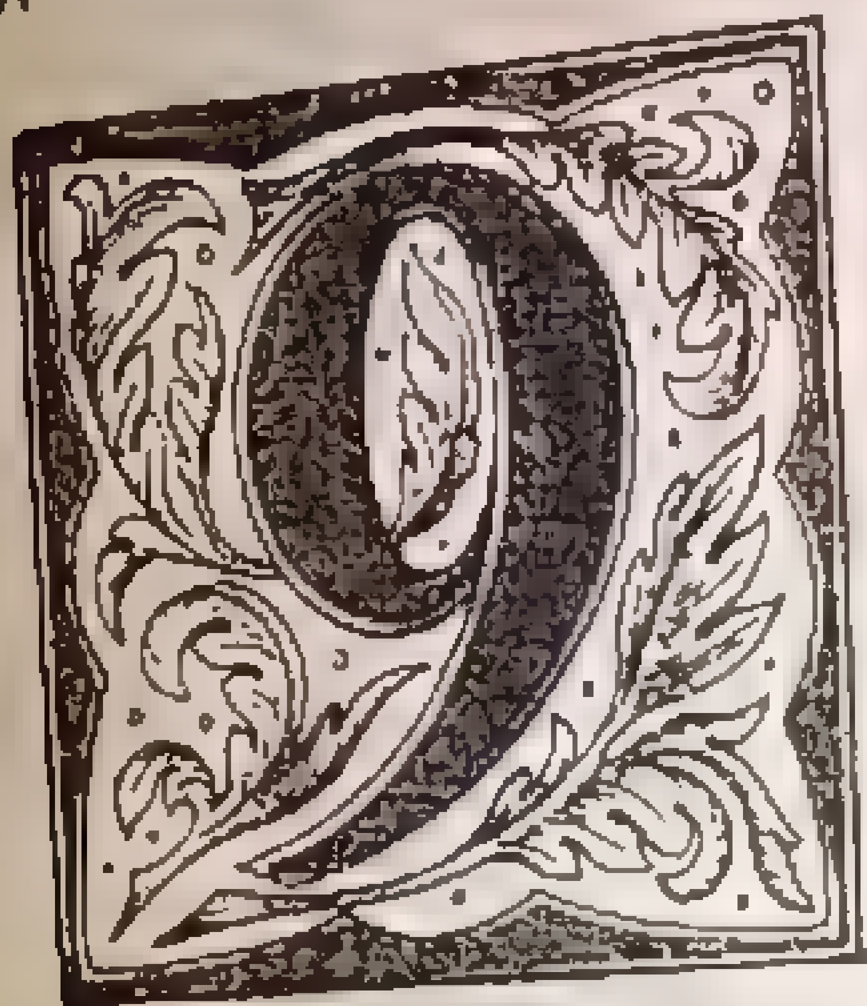


Рис. 20. Число, облегчающее поверку действий.

ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Немногим известно, что 12 — старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ древнего Востока — вавилоняне и их предшественники, еще более древние первонасельники Двуречья, — вели счет в двенадцатиричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам десятичную систему, мы, весьма вероятно, унаследовали бы от Вавилона двенадцатиричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу десятичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам,[2] наше деление суток на две дюжины часов, деление часа на 5 дюжин минут, деление минуты на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец деление фута на 12 дюймов, — не свидетельствует разве все это (и многое другое) о том, как велико в наши дни влияние древней системы?

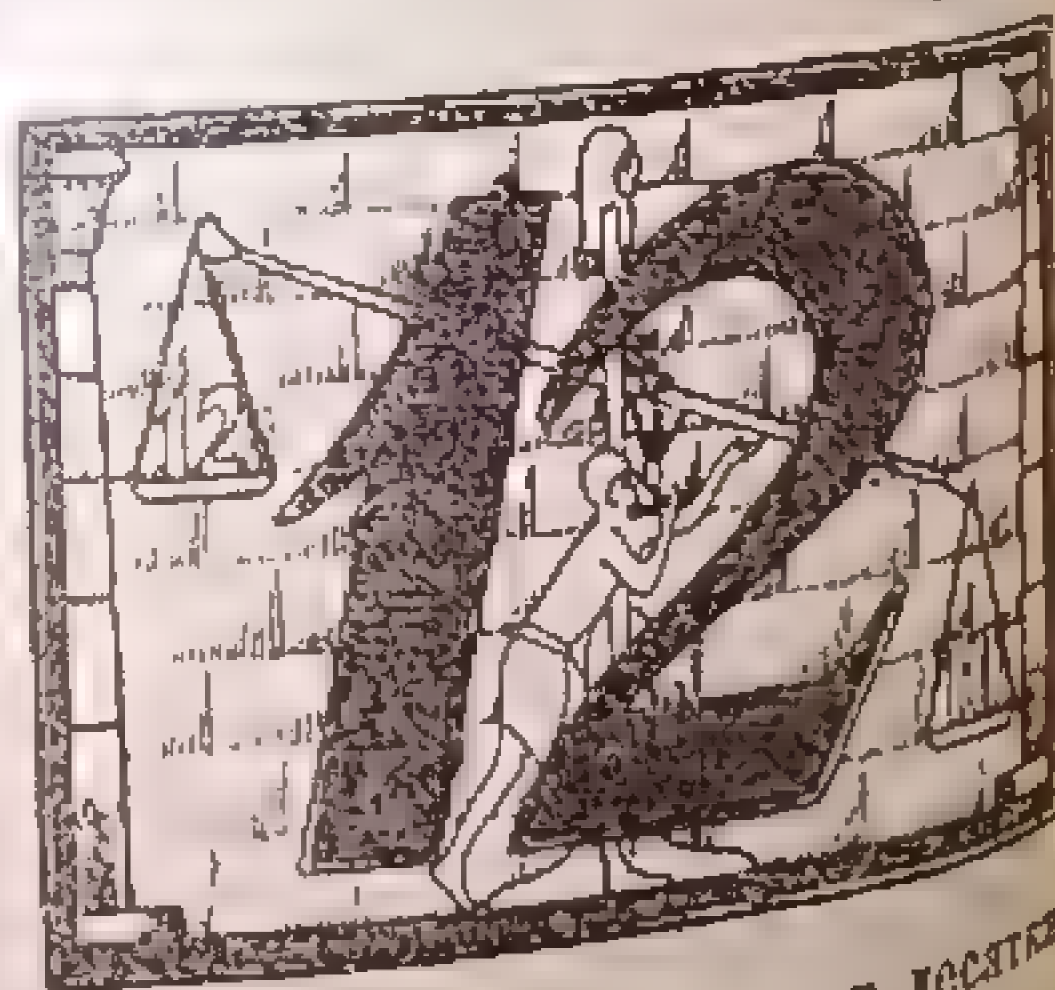


Рис. 21. Древний соперник десятки.

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были

[1] Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, «так как все числа, кратные 9, имеют сумму цифр, кратную 9».

[2] Гросс — 12 дюжин. В коробке перьев — гросс, 144 штуки.

и остаются наши собственные руки с десятью пальцами, — живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы безусловно отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по двенадцатиричной системе, нежели по десятиричной. Причина та, что число 10 делится без остатка на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 — четыре. Преимущества двенадцатиричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в двенадцатиричной системе число, оканчивающееся нолем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте, как удобно дробить число, когда и $^1/_2$, и $^1/_3$, и $^1/_4$, и $^1/_6$ его должны быть целыми числами! Если же выраженное в двенадцатиричной системе число оканчивается двумя нулями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144-х, т. е. на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей — вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в десятичной системе, если оканчиваются двумя нолями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$ и т. д. превращаются в конечные десятичные: в двенадцатиричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$, $^1/_{72}$, $^1/_{144}$, которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы впрочем большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых куч, то это свойство их конечно не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или наконец изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в двенадцатиричной системе, делится на 6 или на 72, то будучи выражено в другой системе счисления, например в десятичной, оно должно иметь те же делители. Разница лишь в том, что в двенадцатиричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нолями). Когда говорят о преимуществах двенад-

цатиричной системы в смысле делимости на большое число делителей, то имеют в виду, что, благодаря склонности нашей «к круглым» числам, на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся, в двенадцатиричной системе, нолями.

При таких преимуществах двенадцатиричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с десятичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Великий французский математик Лаплас так высказался по этому вопросу сто лет назад: «Основание нашей системы нумерации не делится на 3 и на 4, т. е. на два делителя весьма употребительные по их простоте. Присоединение двух новых знаков (цифр) дало бы системе счисления это преимущество; но такое нововведение было бы несомненно отвергнуто. Мы потеряли бы выгоду, породившую нашу арифметику, — именно, возможность счета по пальцам рук».

Напротив, следовало бы ради единообразия перейти также в измерении дуг от употребительных градусов и минут к новым, десятичным.

Такую реформу пытались провести во Франции, но она не привилась. Никто иной, как сейчас упомянутый Лаплас, был горячим сторонником этой реформы. Его знаменитая книга «Изложение системы мира» последовательно проводит десятичное подразделение углов: градусом он называет не 90-ю, а 100-ю долю прямого угла, минутой — 100-ю часть градуса и т. д. Лаплас высказывался даже за десятичное подразделение часов и минут. «Однообразие системы мер требует, чтобы день был разделен на 100 часов, час на 100 минут и минута на 100 секунд» — писал он.

Вы видите следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых диковинок. Зато его соседка «чортова дюжина», 13, фигурирует здесь не потому, что чем-либо замечательна, а скорее именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных людей?

Как было распространено это суеверие (зародившееся в древнем Вавилоне), видно из того, что царское правительство при устройстве электрического трамвая в Петербурге долго не решалось вводить маршрута № 13 и пропустило его, перейдя сразу к № 14: власти думали, что публика не станет ездить в ваго-

вах с таким «роковым» номером. Любопытно и то, что в Петербурге было не мало домов, где 13-й номер квартиры пропущен... В гостиницах также нередко отсутствовала комната № 13, заменяемая № 12а. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием кое-где на Западе (например в Англии) учреждались даже особые «клубы числа 13»...

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

ЧИСЛО 365

Оно замечательно прежде всего тем, что определяет число дней в году. Далее, при делении на 7 оно дает в остатке 1; эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имела большое значение для старого семидневного календаря.

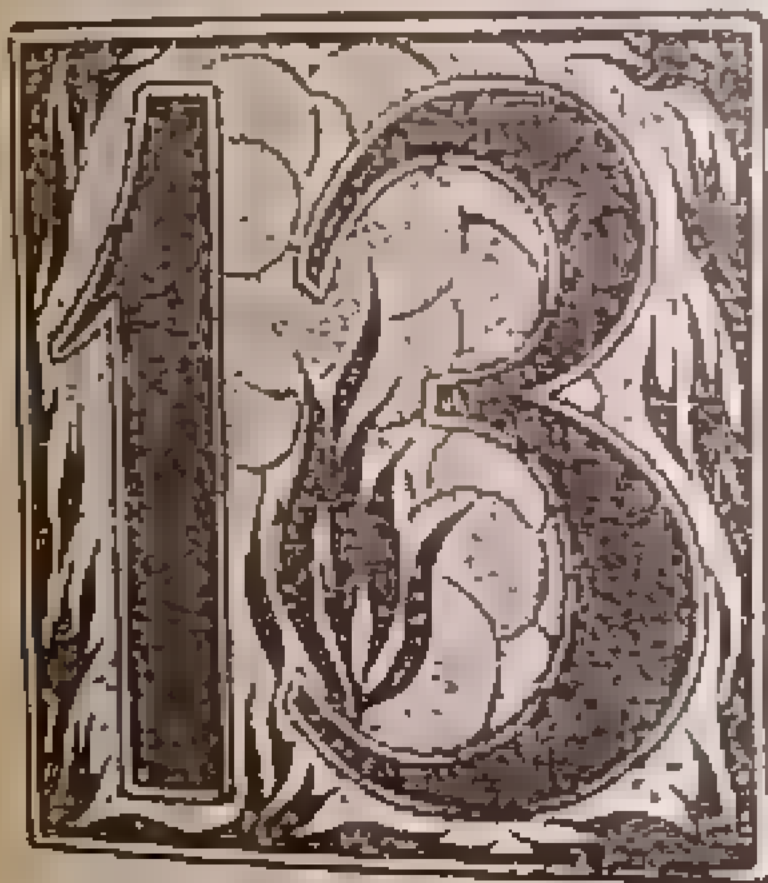


Рис. 22. Число, ничем не замечательное.

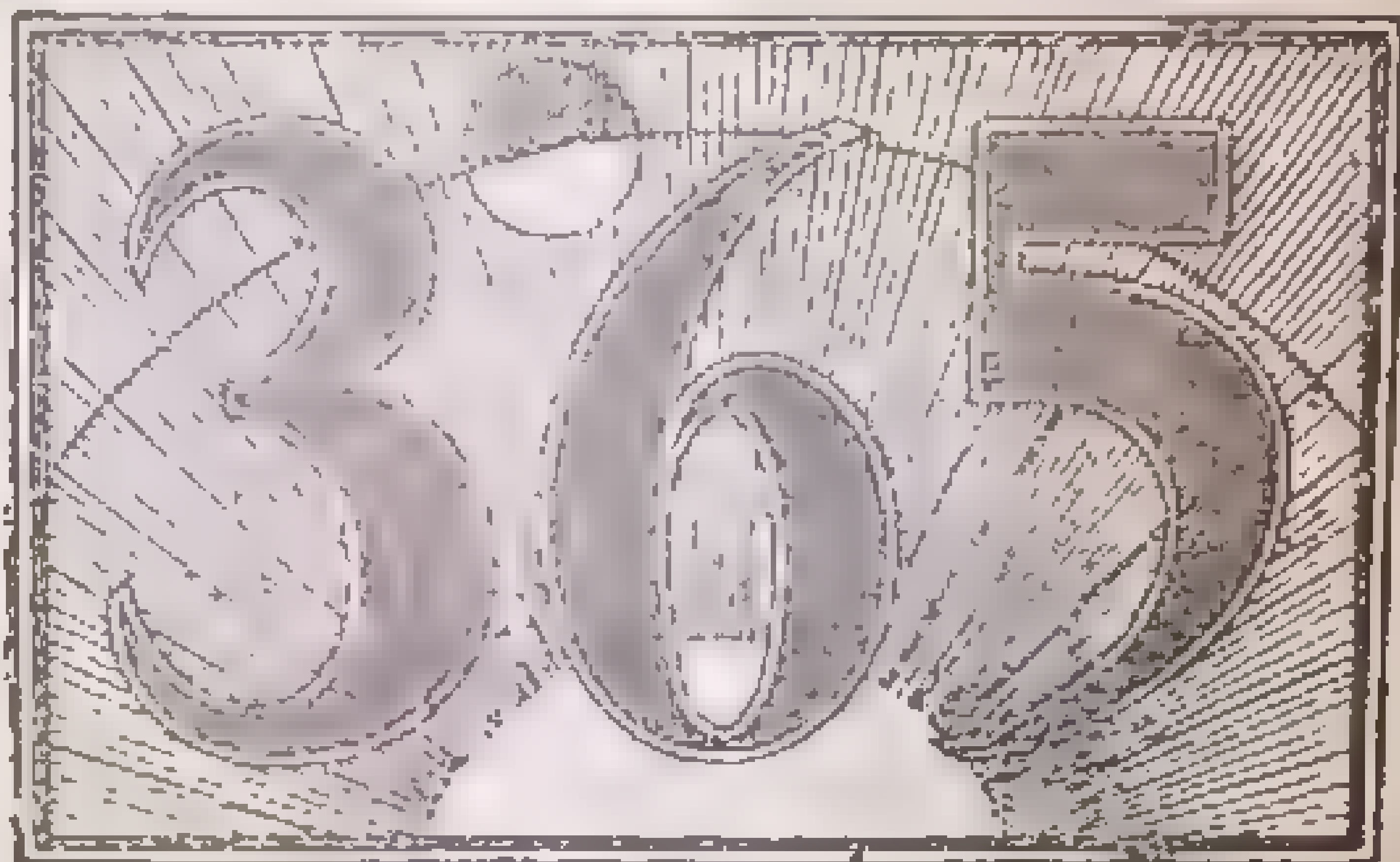


Рис. 23. Известны ли вам особенности этого числа?

Другая особенность числа 365 не связана с календарем:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

т. е. 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

Но и это еще не все, — тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел 13 и 14:

$$13^2 + 14^2 = 199 + 196 = 365.$$

На этом свойстве числа 365 основана задача С. А. Рачинского, изображенная на известной картине «Трудная задача» Богданова-Бельского:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Таких чисел не много наберется в нашей галерее арифметических диковинок.

ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно без сомнения гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение —666— знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх во многих суеверных людей, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел.

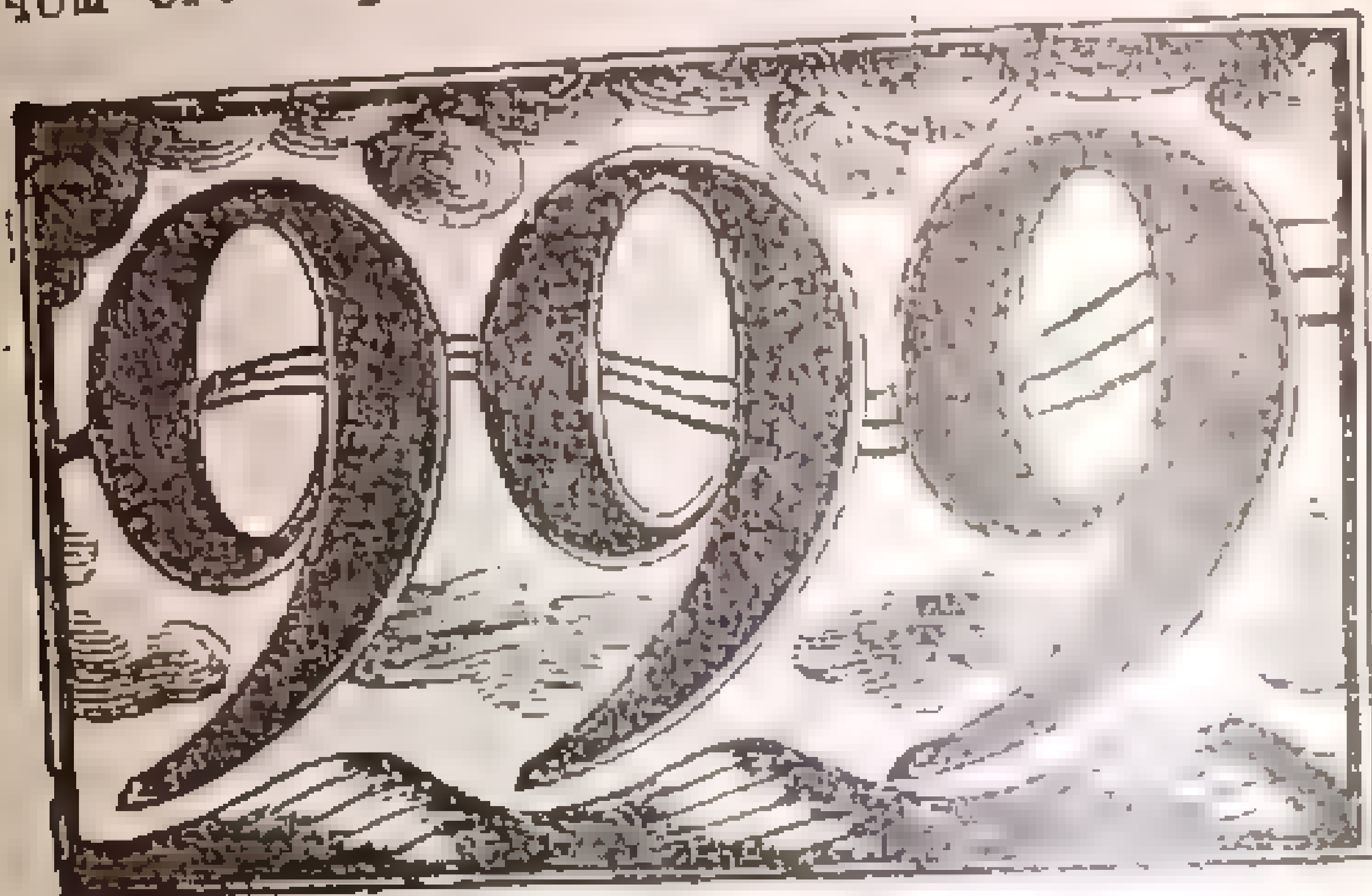


Рис. 24. Число, на которое легко умножать.

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение; первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на единицу, а остальные три цифры (кроме последней) — «дополнения» первых до 9. Например:

$$573 \times 999 = \frac{\overset{572}{572\,427}}{999}$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} 573\,000 \\ -\ 573 \\ \hline 572\,427 \end{array} \right.$$

Зная эту особенность, мы можем «мгновенно» умножать любое трехзначное число на 999.

$$947 \times 999 = 946\,053;$$
$$509 \times 999 = 508\,491;$$
$$981 \times 999 = 980\,019;$$

и т. п.

А так как $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, то вы можете опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны

трехзначных чисел, кратных 37; незнакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления».

ЧИСЛО ШЕХЕРАЗАДЫ

Следующее на очереди у нас число 1001 — прославленное число Шехеразады. Вы вероятно и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

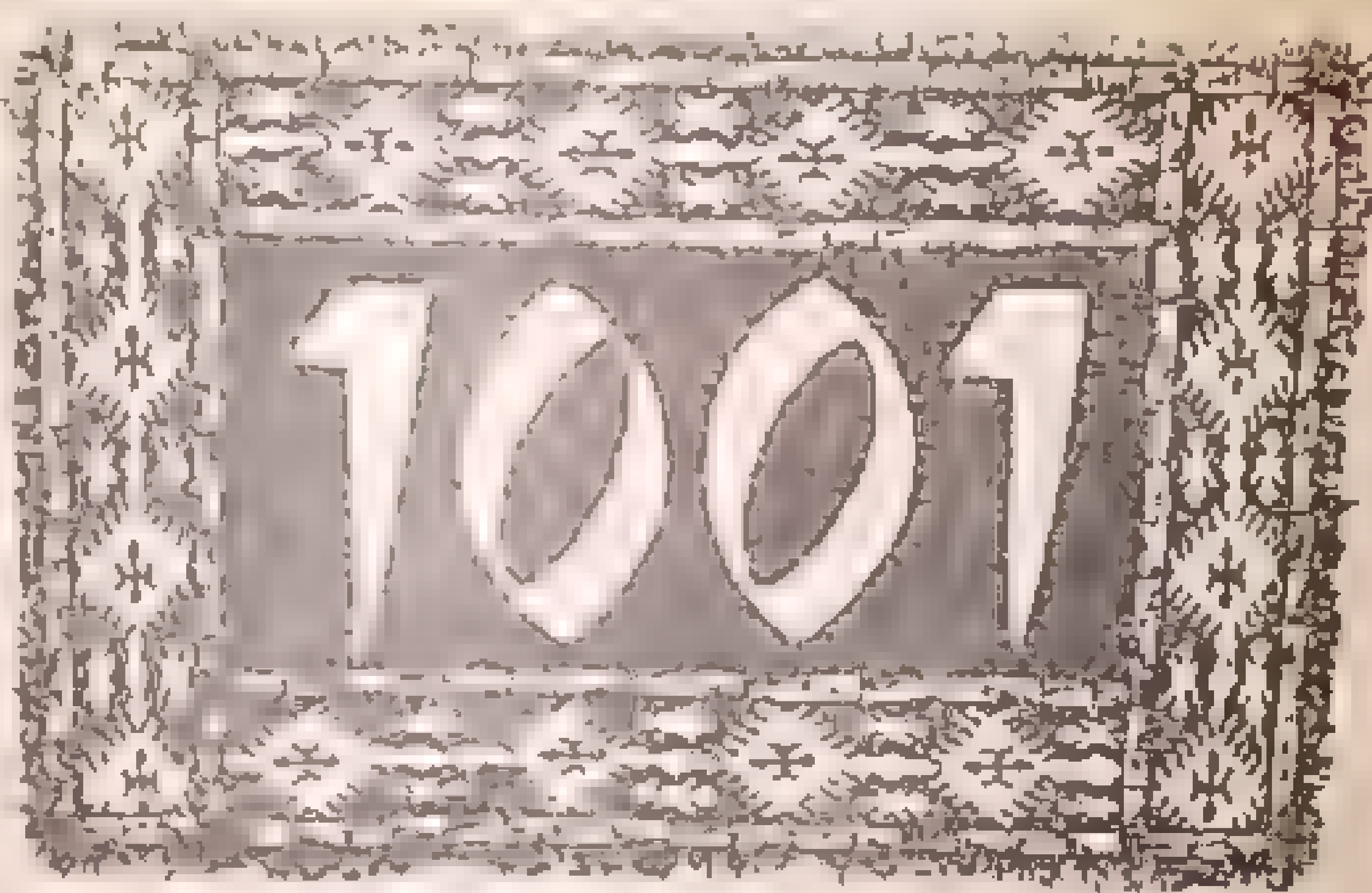


Рис. 27. Число Шехеразады.

Чем же замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых «простых» чисел. Оно делится без остатка и на 7, и на 11 и на 13 — на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но не в том диковинка, что число $1001 = 7 \times 11 \times 13$, — здесь нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

$$873 \times 1001 = 873\,873;$$
$$207 \times 1001 = 207\,207, \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как $873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873000 + 873$, — все же, пользуясь указанным свойством «числа Шехеразады», можно достичь результатов совсем неожиданных, кажущихся волшебными, — по крайней мере человеку неподготовленному.

Сейчас поясним, в чем дело.

Задача № 30

Кружок товарищей, не посвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь

напишет на бумажке, секретно от вас, трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу или его соседу разделить — секретно от вас — это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат передается новому соседу, который, по вашему предложению, делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13,— деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете *первому* товарищу со словами:

— Вот число, которое вы задумали!

Так и есть: вы угадали.

Какова разгадка фокуса?

Решение

Это красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само — значит умножить его на 1001, т. е. на произведение 7 × 11 × 13. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а в результате деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение — 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

ЧИСЛО 10 101

После сказанного о числе 1001 уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галлереи число 10 101. Вы догадаетесь, какому именно свойству обязано это число такой честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении,— но не трехзначных чисел, а *двузначных*: каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате само себя, написанное *трижды*. Например:

$$73 \times 10\,101 = 737373;$$
$$21 \times 10\,101 = 212121.$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10\,101 = 73\,(10\,000 + 100 + 1) = \left\{\begin{array}{r} 730000 \\ +7300 \\ 73 \\ \hline 737373 \end{array}\right.$$

Задача № 31

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Решение

Да, можно. Здесь возможно даже обставить фокус, разнообразнее, если иметь в виду, что 10101 есть произведение четырех простых чисел:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Предложив товарищу задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему — приписать то же число еще раз. Четвертого вы просите разделить получившееся шестизначное число, например, на 7; пятый товарищ должен разделить полученное частное на 3; шестой делит то, что получилось, на 37, и, наконец, седьмой делит этот результат на 13, — причем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому товарищу: это и есть задуманное им число.

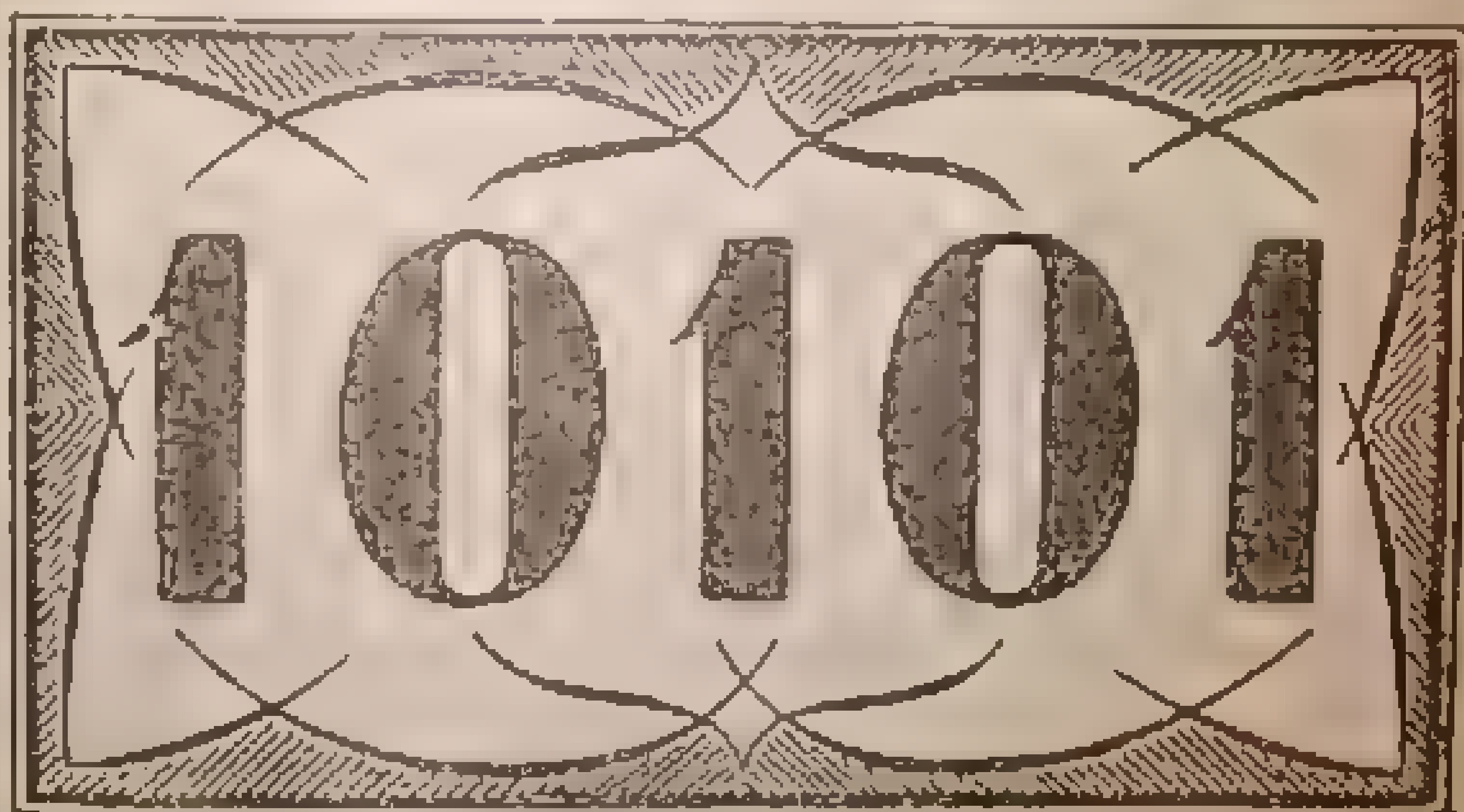


Рис. 26. Число, пригодное для фокусов.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей $3 \times 7 \times 13 \times 37$, можете взять следующие группы трех множителей $21 \times 13 \times 37$; $7 \times 39 \times 37$; $3 \times 91 \times 37$; $7 \times 13 \times 111$.

Число это — 10 101 — пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее его известно своими поразительными свойствами. О нем писалось впрочем еще

3*

двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в главе, где приводятся примеры умножения «с некоим удивлением». Тем с большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

ЧИСЛО 10 001

Задача № 32

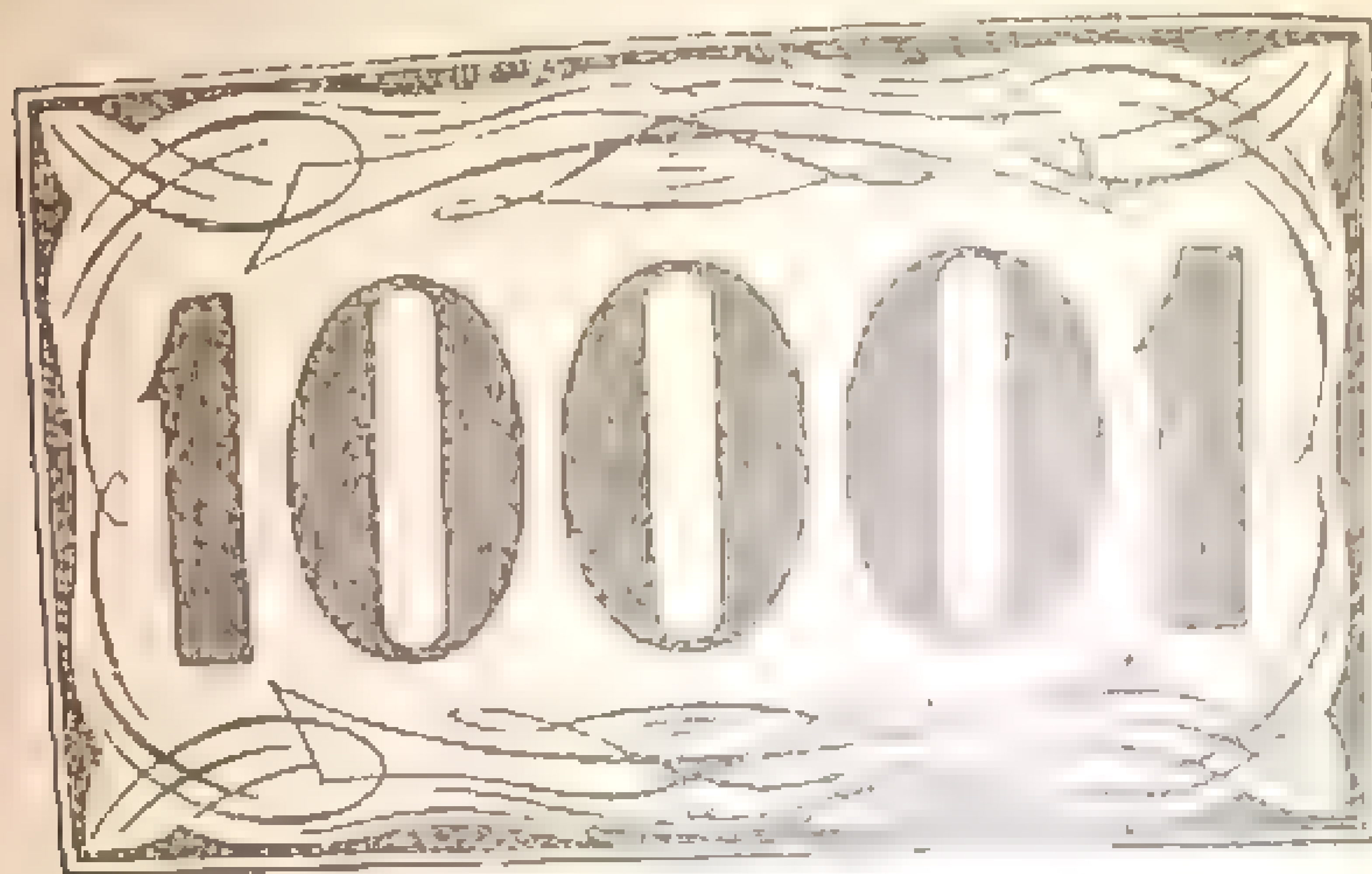


Рис. 27. Другое число, пригодное для фокусов.

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные. Дело в том, что оно представляет собою произведение только двух простых чисел:

$$10\,001 = 73 \times 137.$$

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических действий «с удивлением», читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадается сам.

ЧИСЛО ЕДИНИЦ

В следующей витрине (рис. 28) мы видим новую диковинку арифметической кунсткамеры — число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001, мы сразу соображаем, что

$$111\,111 = 111 \times 1001.$$

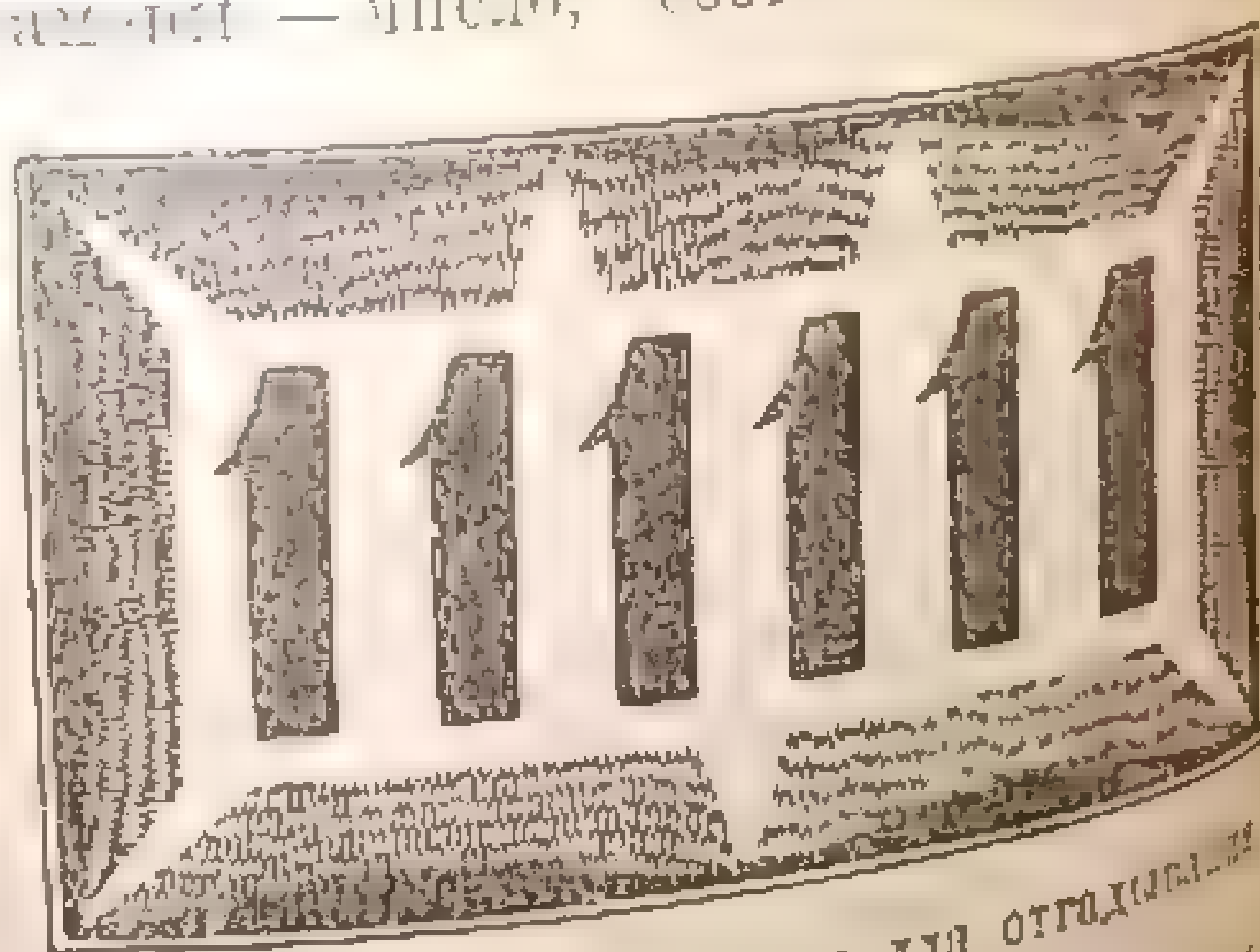


Рис. 28. Число, пригодное для отгадывания.

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111 111:

$$
\begin{aligned}
3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37037 = 111\,111\\
7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 15873 = 111\,111\\
11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10101 = 111\,111\\
13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8547 = 111\,111\\
37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3003 = 111\,111\\
(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5291 = 111\,111\\
(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3367 = 111\,111
\end{aligned}
$$

и т. д.

Вы можете, значит, засадить кружок из 15 товарищей за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111 111.

Задача № 33

То же число 111 111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10 101. В данном случае нужно предлагать задумать число однозначное, т. е. одну цифру, и повторить ее 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса. Как надо поступать в этих случаях, — предоставляю подумать читателю.

ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода — некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из них (рис. 29).

Задача № 34

Как объяснить эти своеобразные результаты умножения?

Решение

Чтобы постичь эту странную закономерность, возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды: $123\,456 \times 9 + 7$. Вместо умножения на 9 можно умножить на $(10 - 1)$, т. е. приписать 0 и вычесть умножаемое:

$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = \left\{ \begin{array}{r} -\;1234567 \\ 123456 \\ \hline 1111111 \end{array} \right.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

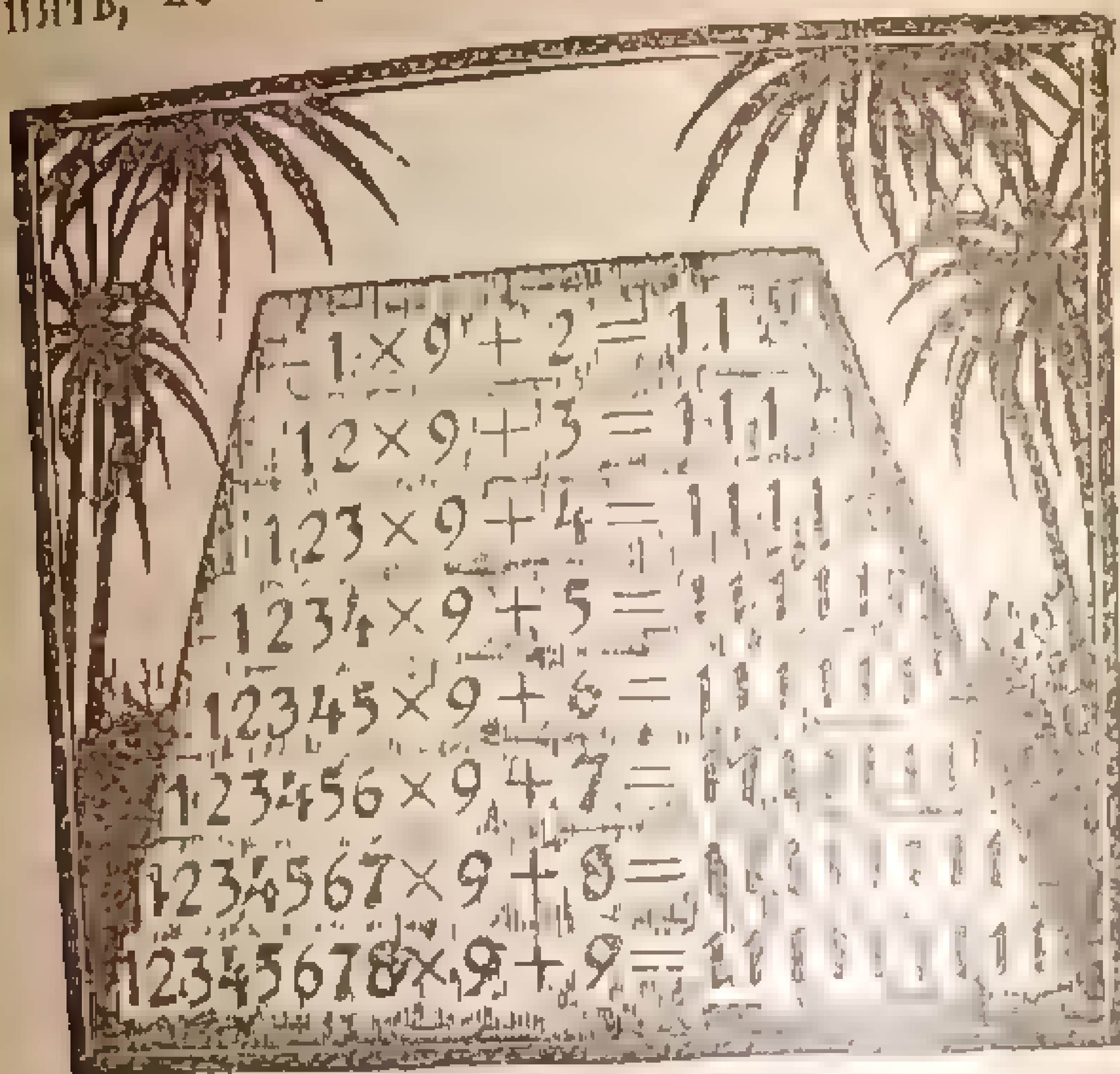


Рис. 29. Первая числовая пирамида.

Мы можем уяснить себе это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12345... превратилось в число вида 11111..., нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей — 2, из четвертой — 3, из пятой — 4 и т. д., — иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12345..., лишенное своей последней цифры, — т. е. вдесятеро уменьшенное и предварительно лишенное последней цифры. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое — значит умножить на 9).

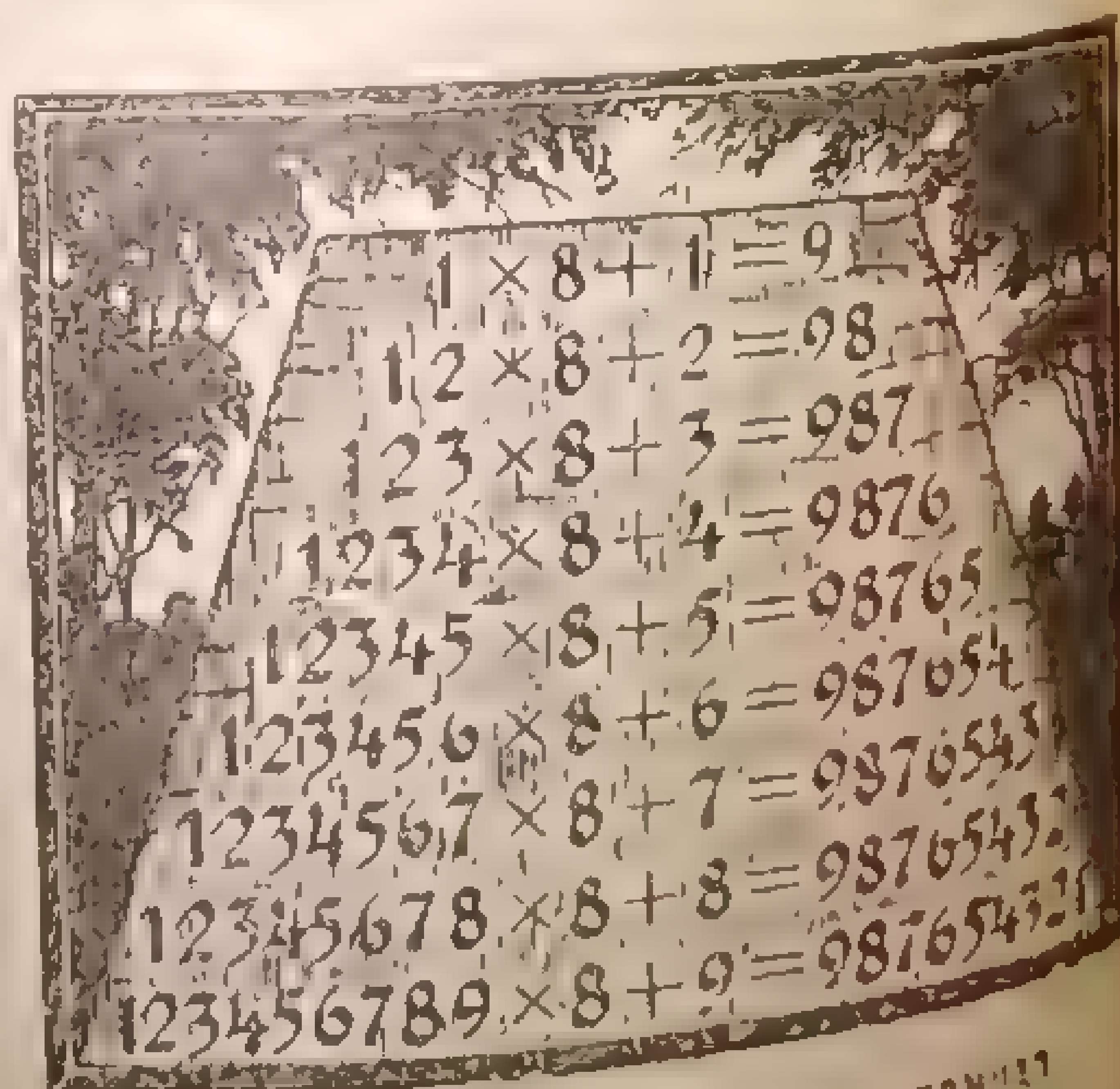


Рис. 30. Вторая числовая пирамида.

Задача № 35

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды (рис. 30), получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в пирамиде

последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в таковой же ряд, но с обратным расположением.

Попытайтесь объяснить эту особенность.

Решение

Получение странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12345 \times 8 + 5 = \left\{ - \begin{matrix} 12345 \times 9 + 6 \\ 12345 \times 1 + 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ - \begin{matrix} 111111\,^{1} \\ 12346, \end{matrix} \right.$$

то есть $12345 \times 8 + 5 = 111111 - 12346$. Но вычитая из числа 111111 число 12346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98765.

Задача № 36

Вот наконец третья числовая пирамида, также требующая объяснения (рис. 31).

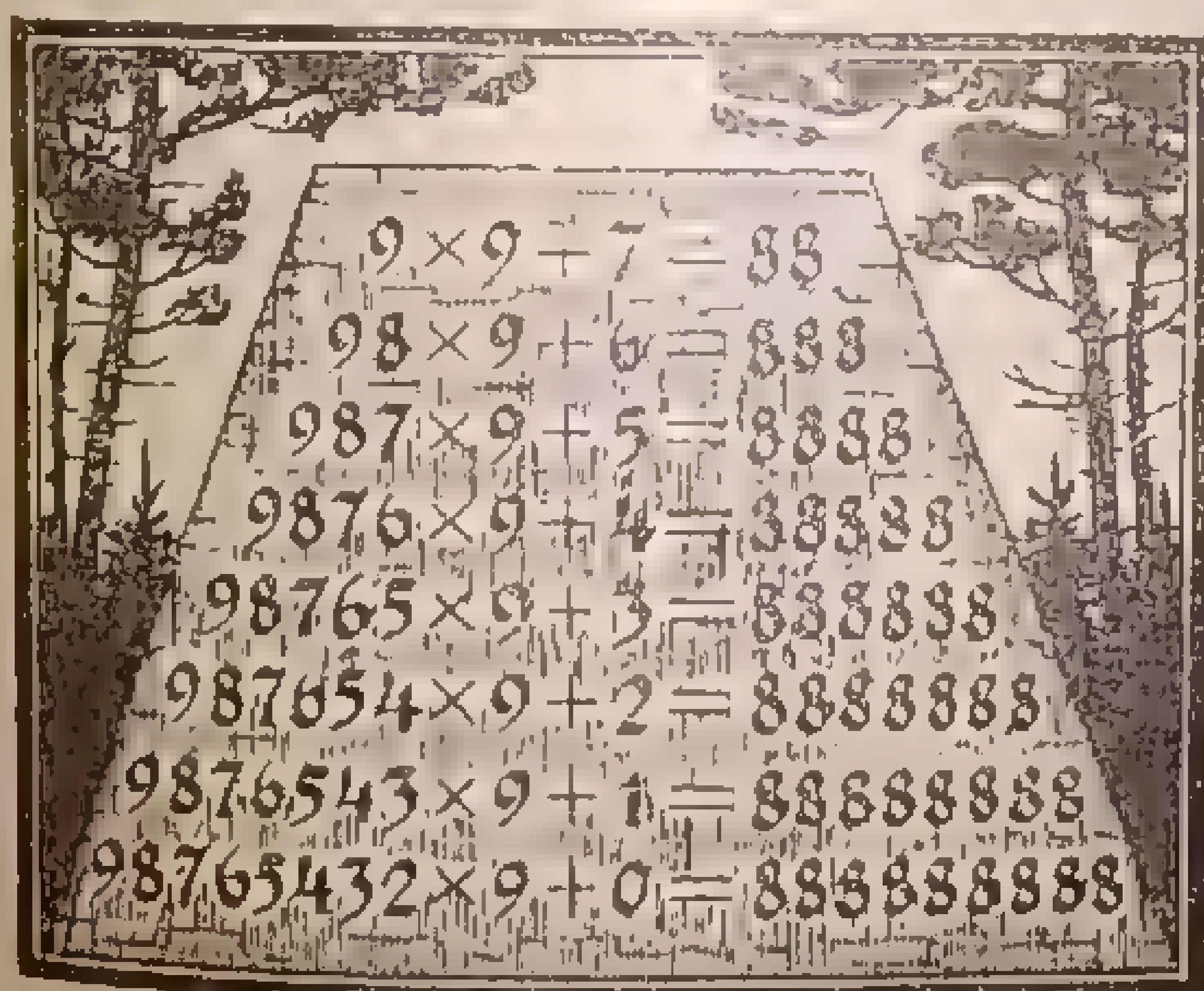


Рис. 31. Третья числовая пирамида.

Решение

Эта пирамида является прямым следствием первых двух. Связь устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

[1] Почему $12345 \times 9 + 6$ дает именно 111111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888888.$$

Но из второй пирамиды известно, что

$$12345 \times 8 + 5 = 98765, \text{ или } 12345 \times 8 = 98760.$$

Значит:

$$888888 = (12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98760 \times 9) + 48 = (98760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98760 + 5) \times 9 + 3 = 98765 \times 9 + 3.$$

Вы убеждаетесь, что все эти числовые пирамиды не так уж загадочны, как кажутся с первого взгляда. Но многие считают их все же неразгаданными. Мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем до сих пор не была объяснена...»

ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Задача № 37

Конечная строка первой из сейчас (рис. 29) рассмотренных «пирамид»:

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

12345679 × 9 = 111111111
12345679 × 18 = 222222222
12345679 × 27 = 333333333
12345679 × 36 = 444444444
12345679 × 45 = 555555555
12345679 × 54 = 666666666
12345679 × 63 = 777777777
12345679 × 72 = 888888888
12345679 × 81 = 999999999

Рис. 32. Своеобразные случаи умножения.

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в таблицу рис. 32.

Откуда такая закономерность в результатах?

Решение

Примем во внимание, что

$$12345678 \times 9 + 9 = (12345678 + 1) \times 9 = 12345679 \times 9.$$

Поэтому

$$12345679 \times 9 = 111111111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$12345679 \times 9 \times 2 = 222222222$$

$$12345679 \times 9 \times 3 = 333333333$$

$$12345679 \times 9 \times 4 = 444444444 \text{ и т. д.}$$

ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

Задача № 38

Любопытно, что получится, если число 111111111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно подозревать, что результат должен быть диковинный, — но какой именно?

Решение

Если вы обладаете способностью четко рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу — действие, могущее затруднить разве лишь Фонвизинского Митрофанушку, размышлявшего о результате умножения «единожды один». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц.[1] Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого не приходится ни разу прибегать к действию умножения);

[1] В двоичной системе счисления, как мы уже объясняли (см. стр. 53,) все умножения именно такого рода. На этом примере еще раз наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

$$
\begin{array}{r}
111111111 \\
\times\ 111111111 \\
\hline
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
111111111 \\
\hline
12345678987654321
\end{array}
$$

Все девять цифр результата симметрично убывают от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть эту «числовую галерею» и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать, — они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$
100 = \left\{ \begin{array}{l}
24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} \\
95\frac{3}{7} + 4\frac{16}{28} \\
98\frac{3}{6} + 1\frac{27}{54} \\
94\frac{1}{2} + 5\frac{38}{76} \\
1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} \\
57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18}
\end{array} \right\}
$$

Каждая сумма состоит только из девяти разных цифр.

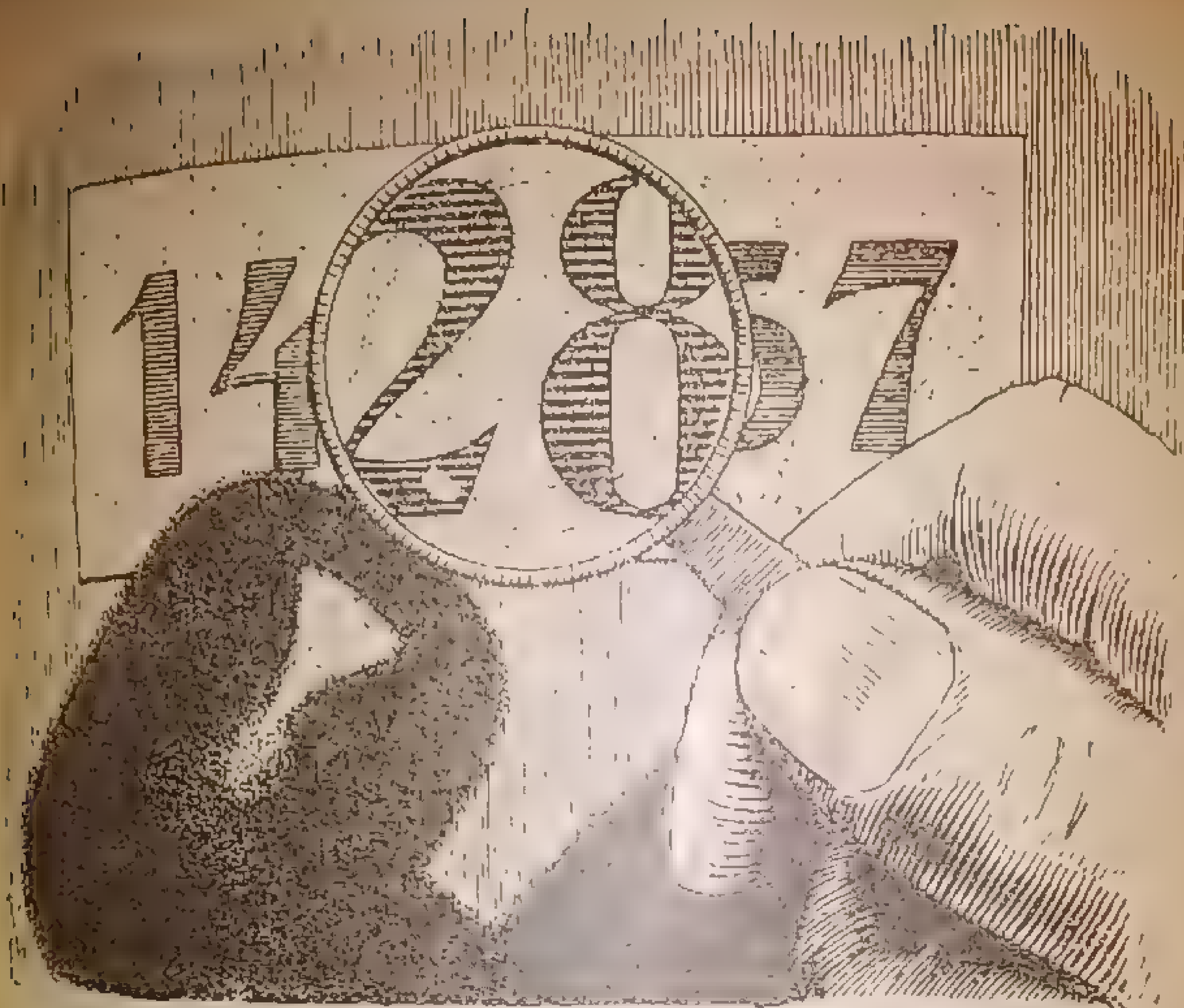


Рис. 33. Объясните тайну этого числа.

МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

Задача № 39

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи? Перед нами (рис. 34) три плоских кольца, вращающихся одно в другом.

На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, именно — обозначено число: 142857. Кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел — считая от любой цифры в направлении часовой стрелки — получим во всех случаях то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет шестизначный), лишь немного подвинутое! В том положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 142857 \\ 428571 \end{array} \\ \hline 571428. \end{array}$$

т. е. опять тот же ряд цифр: 142857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.

При другом расположении колец относительно друг друга имеем такие случаи:

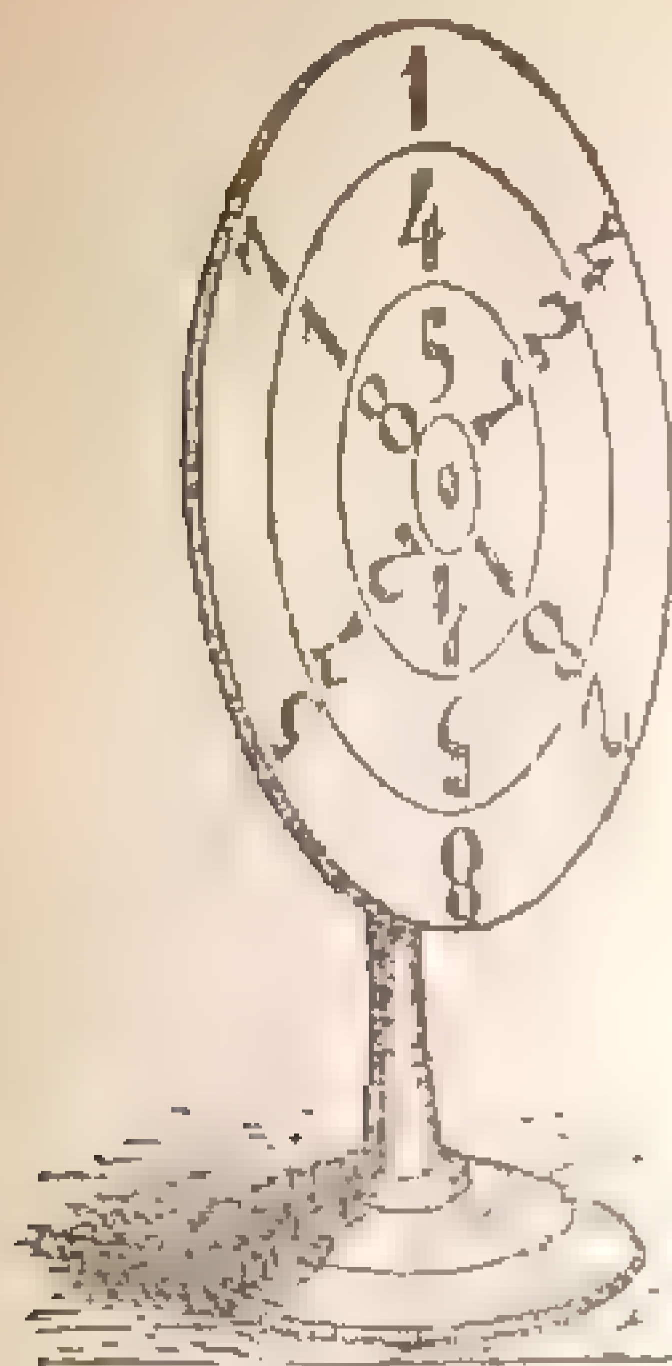


Рис. 34. Вращающиеся числовые кольца.

$$
\begin{array}{r} +\begin{array}{r}285714\\571428\end{array}\\ \hline 857142\end{array}
\qquad
\begin{array}{r} +\begin{array}{r}714285\\142857\end{array}\\ \hline 857142\end{array}
\quad \text{и т. п.}
$$

Исключение составляет случай, когда в результате получается 999999.

$$
\begin{array}{r} +\begin{array}{r}285714\\714285\end{array}\\ \hline 999999\end{array}
$$

(Причину других отступлений от указанного правила читатель поймет, когда дочитает статью до конца.)

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности получим и при вычитании чисел, написанных на кольцах.

Например:

$$
\begin{array}{r} -\begin{array}{r}428571\\142857\end{array}\\ \hline 285714\end{array}
\qquad
\begin{array}{r} -\begin{array}{r}571428\\285714\end{array}\\ \hline 285714\end{array}
\qquad
\begin{array}{r} -\begin{array}{r}714285\\142857\end{array}\\ \hline 571428\end{array}
$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры; тогда, разумеется, разность равна нолю.

Но и это еще не все. Умножьте число 142857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6, — и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

Чем же все загадочные особенности нашего числа обусловлены?

Решение

Мы нападем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999999. Значит, число 142857 не что иное, как седьмая часть 999999, и следовательно дробь $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$. Действительно, если станете превращать $^1/_7$ в десятичную дробь, вы получите:

$$1 : 7 = 0{,}142857\ldots \quad \text{т. е.} \quad {}^1/_7 = 0{,}(142857)$$

```
10
 30
  20
   60
    40
     50
      1
```

Наше загадочное число есть период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении $^1/_7$ в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $^2/_7$ и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $^1/_7$, а $^2/_7$. Начав же превращать дробь $^2/_7$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 — один из тех остатков, которые у нас уже получались при превращении $^1/_7$: ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но начнется он с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое произойдет и при умножении на 3, на 4, на 5 и 6, т. е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить единицу, или — что то же самое — 0,9999...

Любопытные результаты с л о ж е н и я и в ы ч и т а н и я чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142857 есть период дроби, равной $^1/_7$. В самом деле: что мы собственно делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр спереди на конец, т. е., согласно только что сказанному, умножаем число 142857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно все действия сложения или вы-

читания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $^1/_7$, $^2/_7$, $^3/_7$ и т. д. В результате мы должны получить конечно несколько седьмых долей, — т. е. опять-таки наш ряд цифр 142857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают единицу или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательное, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142857, например на 8, мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999999) прибавить наше число:

$$142857 \times 8 = 142857 \times 7 + 142857 = 999999 + 142857 =$$
$$= 1000000 - 1 + 142857 = 1000000 + (142857 - 1).$$

Окончательный результат — 1142856 — отличается от умножаемого 142857 только тем, что впереди стоит еще одна единица, а последняя цифра на единицу же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142857 на всякое другое число, больше 7, — как легко усмотреть из следующих строк:

$$142857 \times 8 = (142857 \times 7) + 142857 = 1142856$$
$$142857 \times 9 = (142857 \times 7) + (142857 \times 2) = 1285713$$
$$142857 \times 10 = (142857 \times 7) + (142857 \times 3) = 1428570$$
$$142857 \times 14 = (142857 \times 7 \times 2) + (142857 \times 2) = 2285712$$
$$142857 \times 39 = (142567 \times 7 \times 5) + (142857 \times 4) = 5571423$$

Общее правило здесь такое: при умножении 142857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата.[1] Пусть мы желаем умножить 142857 на 86. Множитель 86 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно результат умножения таков:

$$12571428 - 12 = 12571416.$$

От умножения 142857×365 мы получим (так как 365 при делении на 7 даст в частном 52, а в остатке 1):

$$52142857 - 52 = 52132805.$$

[1] Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999999, умноженному на число семерок в множителе: такое умножение легко выполнить в уме. Например, $142857 \times 28 = 999999 \times 4 = 4000000 - 4 = 3999996$.

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно, — нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносным умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, заметим, что оно произошло от $1/7$, или — что то же самое — от $2/14$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 999.

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 142 \\ \hline 857 \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами — именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

Но $143 = 13 \times 11$. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном $7 \times 11 \times 13$, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения 142857×7:

$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = 999 \times 1001 = 999999$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

ФЕНОМЕНАЛЬНАЯ СЕМЬЯ

Задача № 40

Только что рассмотренное число 142857 является одним из членов целого семейства чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число: 0588235294117647 (0 впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:

$$0588235294117647 \times 4 = 2352941176470588.$$

Расположив цифры этого числа на ряде подвижных колец, как в предыдущем случае, — мы при сложении чисел двух

колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} 0588235294117647 \\ +\,2352941176470588 \\ \hline 2941176470588235 \end{array}$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От вычитания чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} 2352941176470588 \\ -\,0588235294117647 \\ \hline 1764705882352941 \end{array}$$

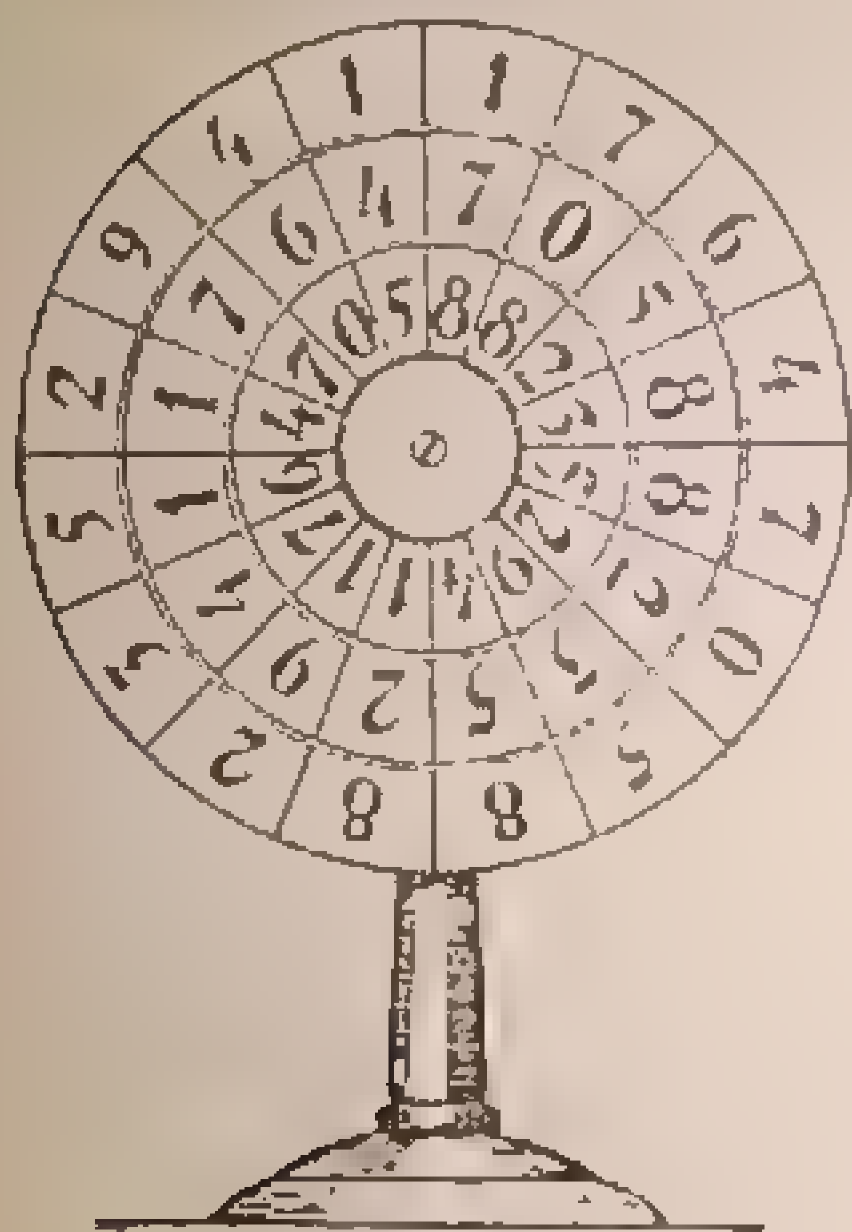


Рис. 35. Еще одно удивительное число.

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Попробуйте найти разгадку всех этих особенностей.

Решение

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался близким родственником числа 142857: последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $^1/_7$, новое же число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби. Так и есть, наш длинный ряд цифр — не что иное, как период бесконечной дроби, получающийся от превращения в десятичную простой дроби $^1/_{17}$:

$$^1/_{17} = 0,(0588235294117647).$$

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот — перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем число в несколько раз (от 1 до 16 включительно). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух умноженных чисел — например, утроенного и удесятеренного

тремного — и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на 3 + 10, т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, незаметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются однако суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если например повернем кольца так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на 6 + 15 = 21. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель, меньший 17. В самом деле: так как наше число есть период дроби, равной $^1/_{17}$, то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько их в подразумеваемом знаменателе периодической дроби), или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21, т. е. на 4 + 17, мы должны получить четырехкратное наше число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнята 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $^4/_{17}$.

4 : 17 = 0,23....
40
60
9

Порядок остальных цифр известен: 5294.... Значит, 21-кратное наше число будет:

2352941176470588.

Столько и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При вычитании числовых колец такого случая, разумеется, быть не может.

Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, число цифр периода

которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так, например:

$^1/_7$ дает в периоде 6 цифр.
$^1/_{17}$ » » » 16 »
$^1/_{19}$ » » » 18 »
$^1/_{23}$ » » » 22 »
$^1/_{29}$ » » » 28 »

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $^1/_{19}$, $^1/_{23}$ и $^1/_{29}$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренные нами периоды дробей $^1/_7$ и $^1/_{17}$.

Например, от $^1/_{29}$ получаем число

0344827586206896551724137931.

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $^1/_{13}$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$^1/_{13} = 0,076923.$$

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$^1/_{13} = 0,153846.$$

Почему? Потому что среди остатков от деления 1 : 13 не было числа 2. *Различных* остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12; следовательно не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку (076923 × 3 = 230769), на остальные — нет. Вот почему от $^1/_{13}$ получается число, лишь отчасти пригодное для «магического кольца». То же надо сказать и о ряде других периодов.

Как видите, длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собою настоящую «Калифорнию» арифметических достопримечательностей.

Решение задачи № 28
(стр. 57)

Число 130 в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной	10000010
» троичной	11211
» четверичной . . .	2002
» пятиричной	1010
» шестиричной . . .	334
» семиричной	244
» восьмиричной . . .	202
» девятиричной . . .	154

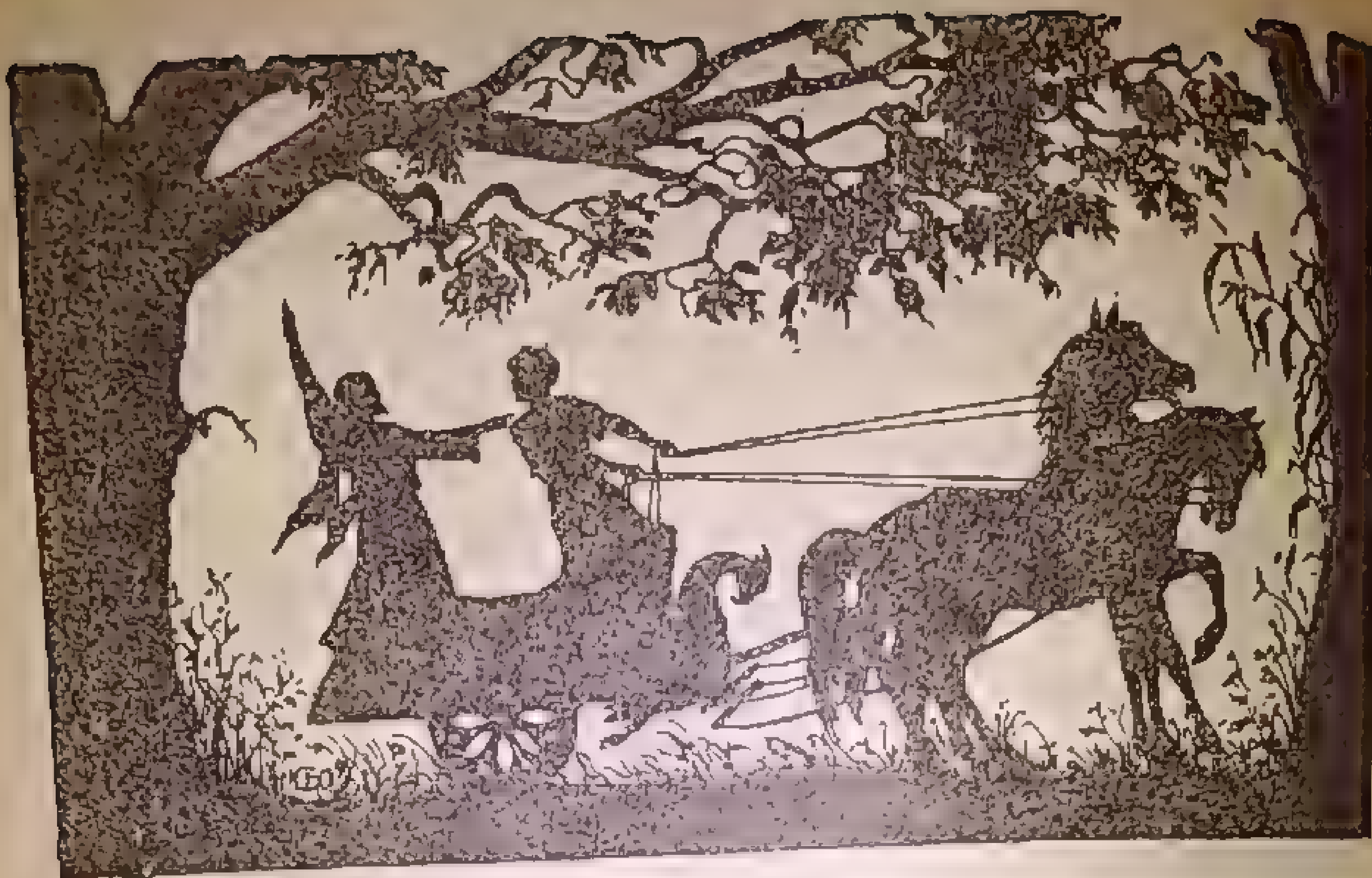


Рис. 36. «В искусстве править конями ты первый...»

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА

ИСКУССТВО ИНДУССКОГО СЧЕТЧИКА

Арифметические фокусы — честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в тщательном изучении и использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для незнающего арифметики и самое обычное действие кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда умение выполнять даже обыкновенные арифметические действия над большими числами, знакомые теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какой-то сверхъестественной способностью. В древне-индусской повести «Наль и Дамаянти»[1] находим отголосок такого взгляда на арифметические действия.

[1] Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

Наль, умевший превосходно править лошадьми, вез однажды счетчика-виртуоза Ритуперна мимо развесистого дерева — Вибитаки.

Вдруг он увидел вдали Вибитаку — ветвисто-густою
Сенью покрытое дерево. «Слушай,— сказал он:
— Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве
Править конями ты первый; зато мне далося искусство
Счета»...

И в доказательство своего искусства счетчик мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и тот соглашается.

«. . . Лишь только
Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись
Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитаки
Разом мог перечесть...»

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее — на число сучьев дерева (предполагая, что все сучья одинаково обросли ветками, а ветки — листьями).

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет «фокуса» Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем секрет фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

НЕ ОТКРЫВАЯ КОШЕЛЬКОВ

Задача № 41

Фокусник высыпает на стол кучу монет на сумму 3 рубля и предлагает вам задачу: разложить деньги по 9 кошелькам так, чтобы можно было уплатить любую сумму до 3 рублей, не открывая кошельков.

Это может показаться совершенно невыполнимым. Не думайте однако, что фокусник расставил вам ловушку из игры слов или из неожиданного их толкования. Посмотрите: фокусник сам берется за дело. Разложив монеты по кошелькам и привязав к каждому ярлычок с обозначением вложенной суммы, он предлагает вам назначить любую сумму не выше 3 рублей.

Вы называете первую пришедшую на ум: 2 р. 69 к.

Без малейшего промедления фокусник отбирает и подает вам 4 кошелька. Вы открываете их и находите:

в одном	— р. 64 к.
» другом	— » 45 »
» третьем	1 » 28 »
» четвертом	— » 32 »
Итого	2 р. 69 к.

Вы готовы заподозреть фокусника в ловкой подмене кошельков и требуете повторения фокуса. Он пододвигает все кошельки к вам, и когда вы называете новую сумму, — например, 1 рубль, или 7 коп., или 2 р. 93 к., — немедленно ука-

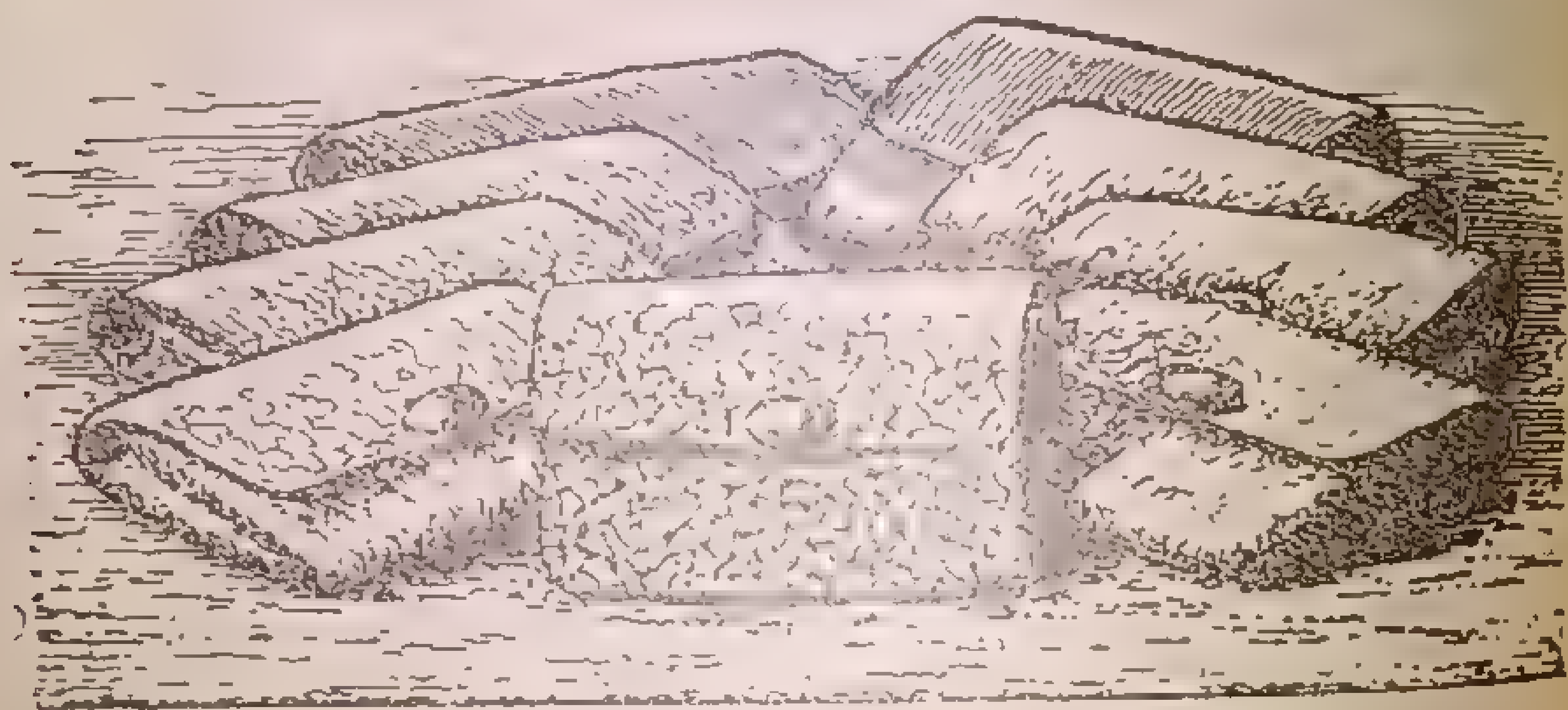


Рис. 37. Фокус с девятью кошельками.

зывает, какие из лежащих у вас под рукою кошельков должны вы взять, чтобы составилась назначенная вами сумма. А именно:

для 1 рубля — 6 кошельков (32 к., 1 к., 45 к., 16 к., 2 к., 4 к.).

Для 7 коп. — 3 кошелька (1 к., 2 к., 4 к).

Для 2 р. 93 коп. — 7 кошельков (1 р. 28 к., 32 к., 8 к., 45 к., 64 к., 16 к.)

Кошельки по приказу фокусника, оказывается, всегда готовы составить любую названную сумму (до 3 рублей).

Решение:

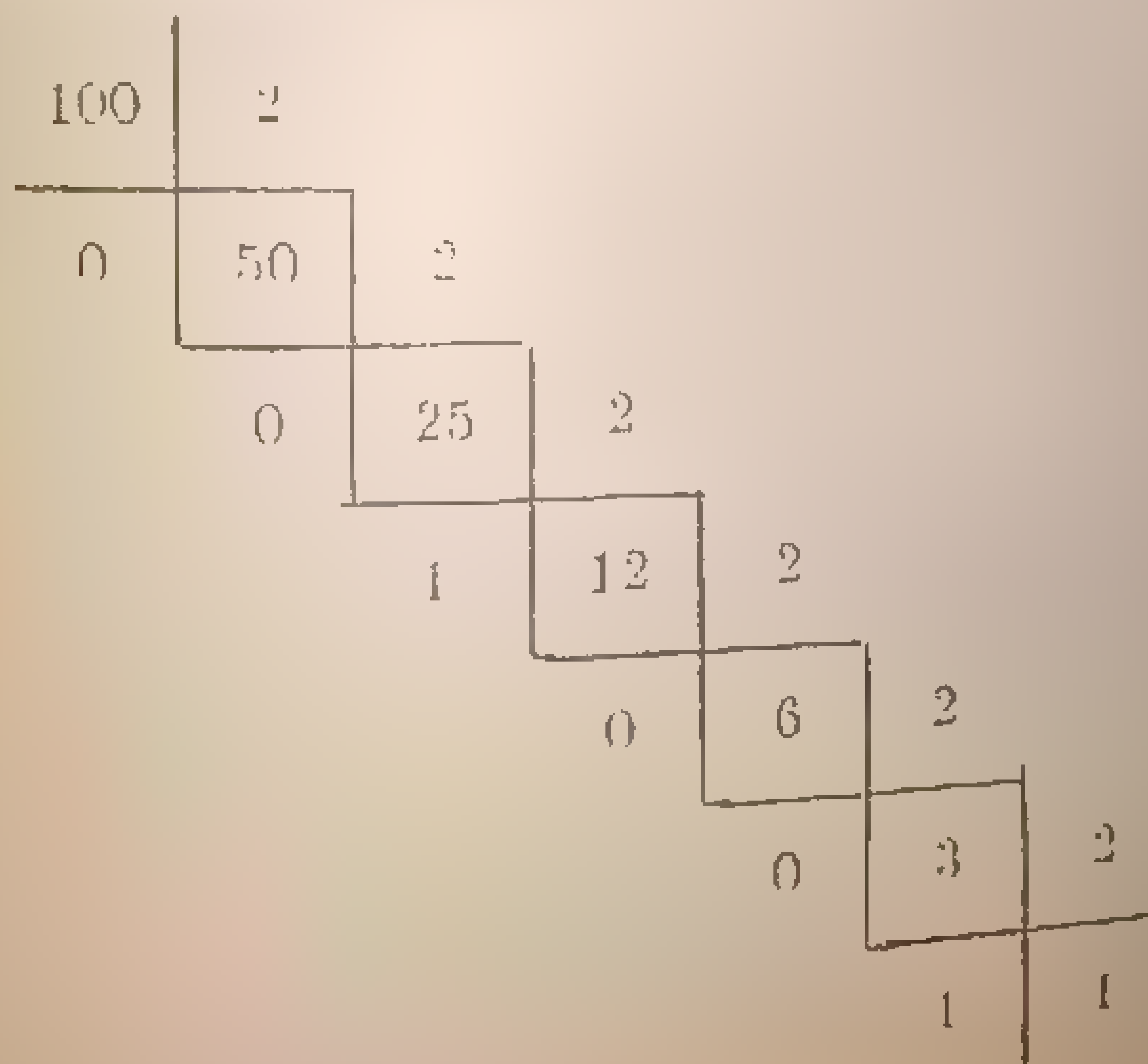
Чем это объяснить?

Секрет кроется в том, чтобы разложить монеты следующим образом: 1 к., 2 к., 4 к., 8 к., 16 к., 32 к., 64 к. и 128 к. и, наконец, в последний — остальные деньги, т. е.

$$300-(1+2+4+8+16+32+64+128)=300-255=45 \text{ к.}$$

Из первых 8 кошельков возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255 коп.; если же задается сумма большая, то пускают в дело последний кошелек, с 45 копейками, а разницу составляют из первых восьми кошельков.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас вероятно интересует и то, почему собственно ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т. д. обладает столь замечательным свойством. Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени 2-х: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, и т. д.,[1] и следовательно их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то значит и всякое число возможно составить из суммы степеней 2-х, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете кошельки, чтобы составить из их содержимого заданное число вы в сущности выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например, число 100 легко составить, если изобразить его в двоичной системе:



$$100 = \underset{64}{1}\ \underset{32}{1}\ \underset{(16)}{0}\ \underset{(8)}{0}\ \underset{4}{1}\ \underset{(2)}{0}\ \underset{(1)}{0}$$

$$100 = 64 + 32 + 4$$

[1] Проходившие алгебру знают, что число 1 можно рассматривать, как 2 в нулевой степени.

Напомним, что в двоичной системе на первом месте справа стоят единицы, на втором — двойки, на третьем — четверки, на четвертом — восьмерки и т. д.

УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

Задача № 42

Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить на стол, а рядом положить 8 бумажных квадратиков. Затем просите в вашем отсутствии проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую — переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробок, а другую половину — перекладывая на следующую бумажку, не забывая, при нечетном числе спичек, класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробок (см. рис. 38 и 39).

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

Решение

Эти «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано на столе — в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на схемах рис. 38 и 39.

Нетрудно сообразить, что проделанные со спичками операции в сущности те же самые, какие мы выполнили бы, если бы

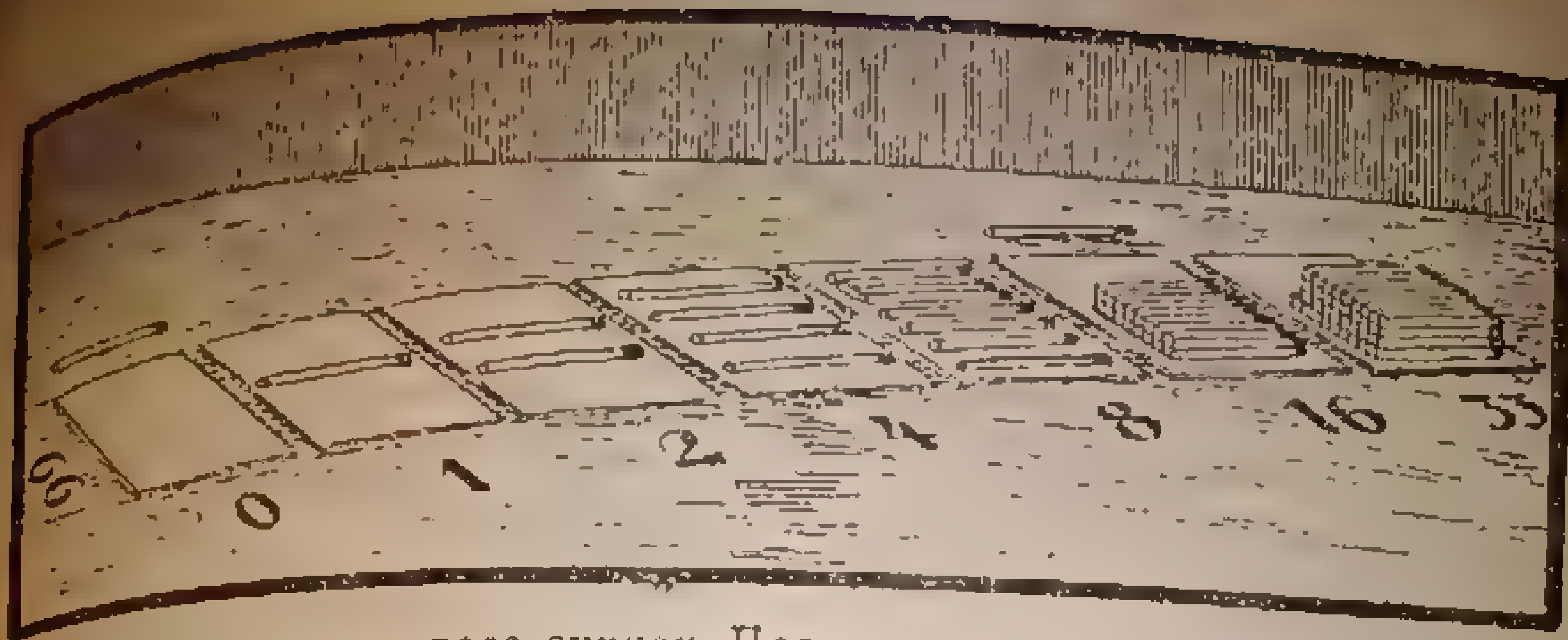


Рис. 38. Отгадывание числа спичек. Последовательные действия загадчика.

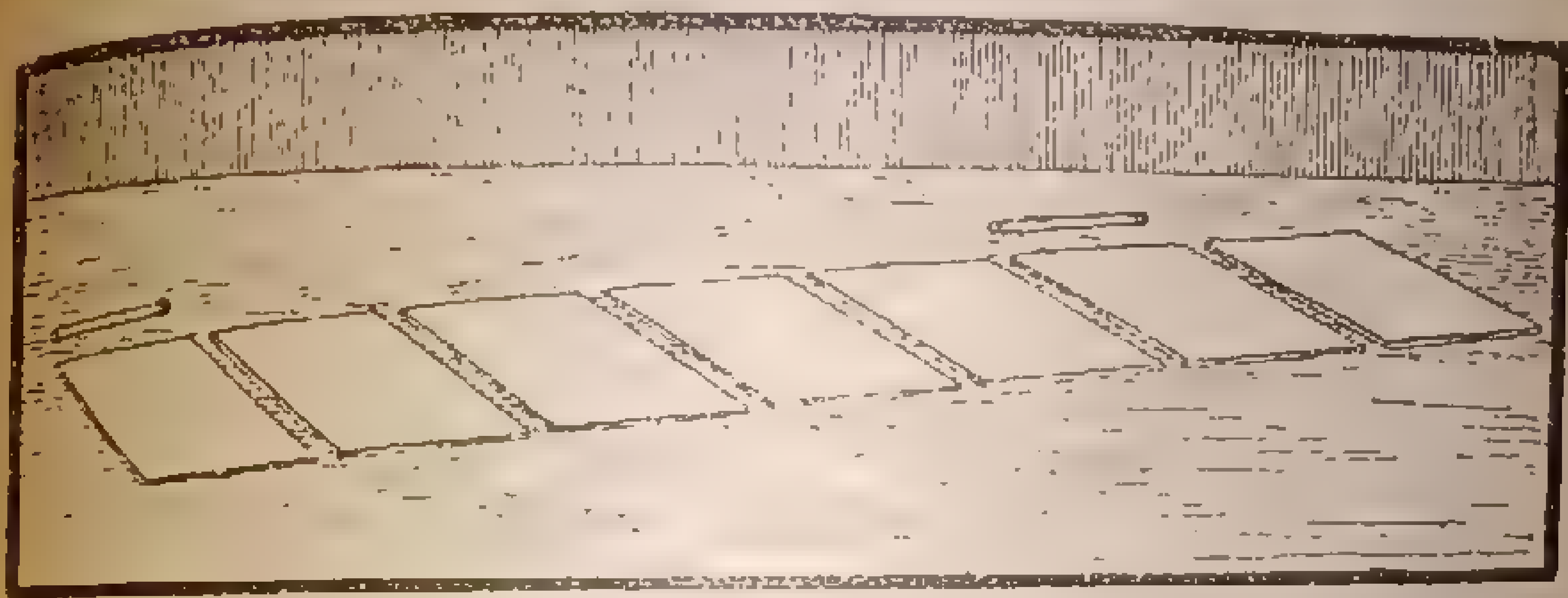


Рис. 39. Продолжение фокуса: окончательный вид бумажек.

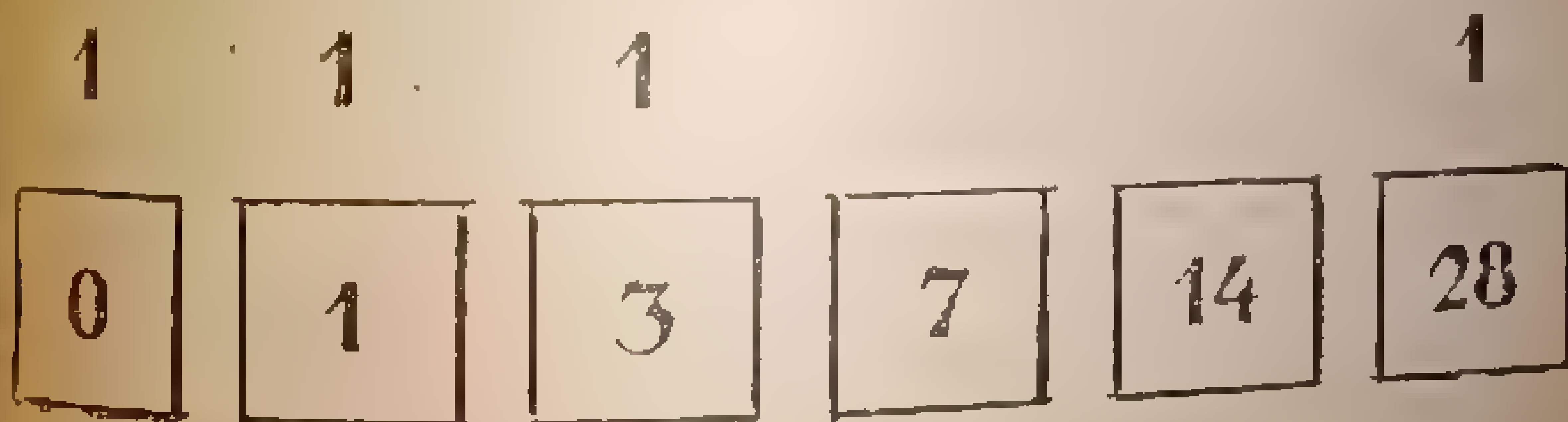


Рис. 40. Другой случай отгадывания. Начало фокуса.

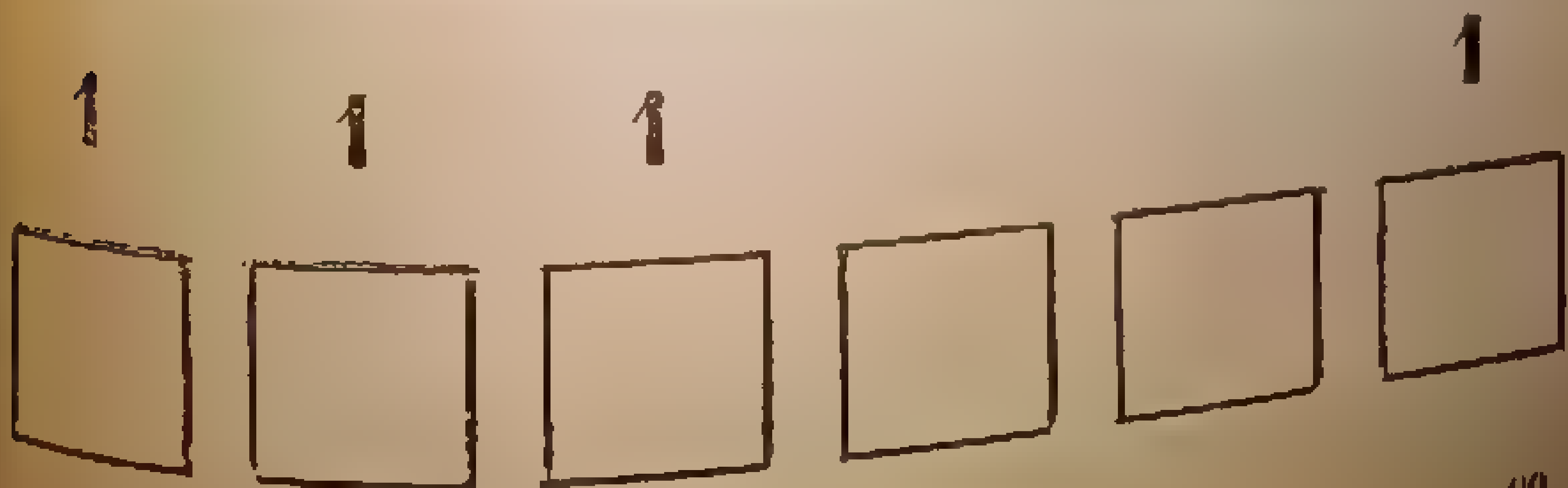


Рис. 41. Конец фокуса.

хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема — прямо изобразит это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, — за единицы. Читая схему слева направо, получаем:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 64 & (32) & (16) & (8) & (4) & 2 & (1) \end{matrix}$$

в десятичной же системе: $64 + 2 = 66$.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы, показанные на рис. 40 и 41.

Искомое число, написанное по двоичной системе:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & (4) & (2) & 1 \end{matrix}$$

А в десятичной: $32 + 16 + 8 + 1 = 57$.

«ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ» ПО СПИЧКАМ

Задача № 43

Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа отбрасывая единицу) — и при каждом делении

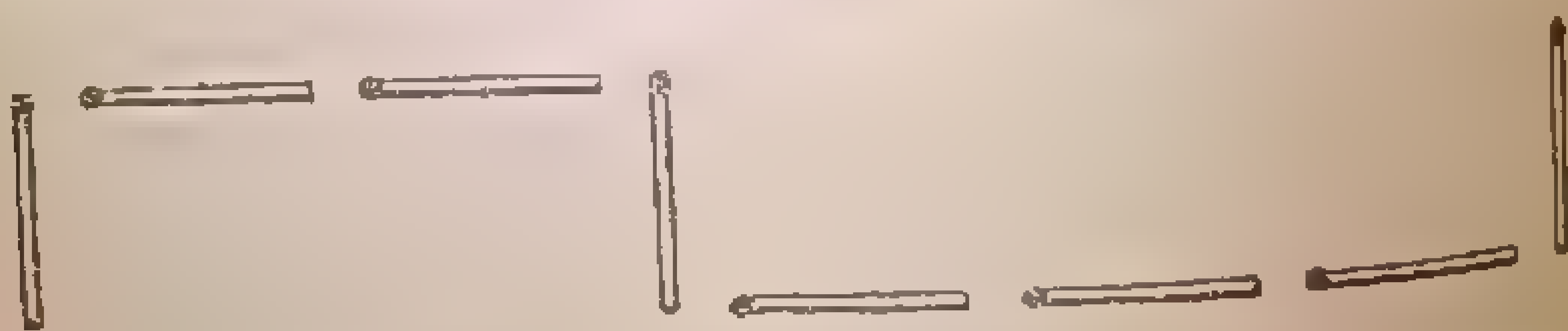


Рис. 42. Отгадывание задуманного числа по спичкам: что делает загадчик.

класть перед собой спичку, направленную вдоль стола, если делится число четное, и поперек, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде показанной на рис. 42.

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

Как вы узнаете его?

Решение

Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) последовательно обозначить возле каждой спички то число, при делении которого она была положена (рис. 43).

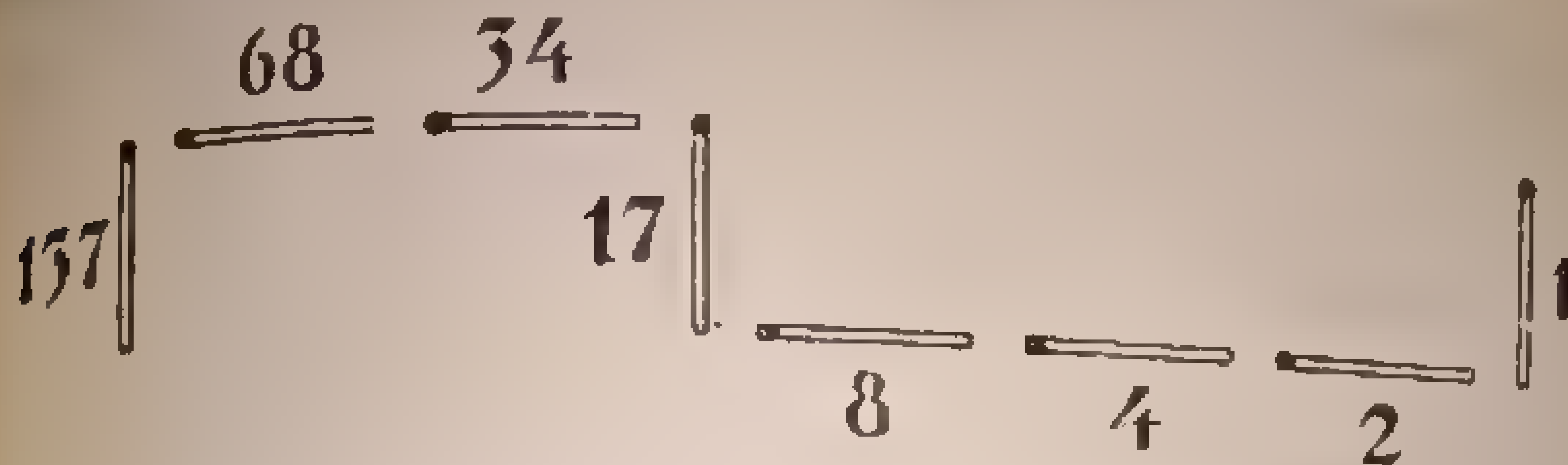


Рис. 43. Секрет фокуса: что делает отгадчик.

Теперь понятно, что так как последняя спичка во всех случаях означает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре рис. 44 вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять, где надо, единицу, получаем загадочные (см. рис. 45).

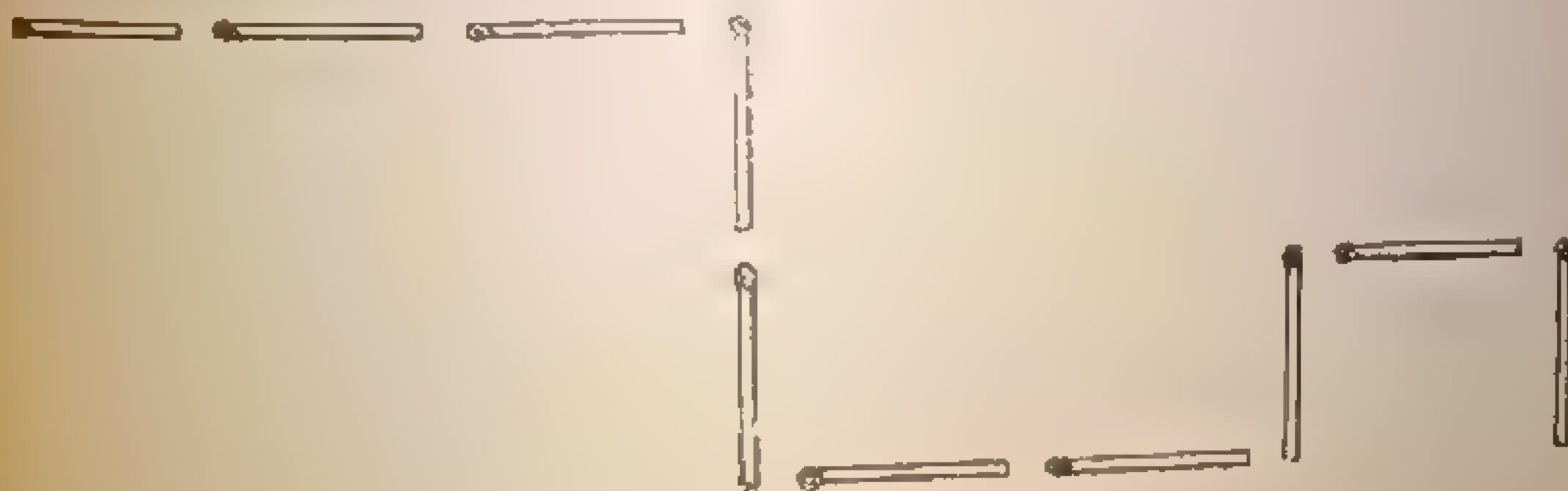


Рис. 44. Какое число здесь изображено?

Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстановляете всю цепь выкладок.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что лежащая спичка должна соответствовать в двоичной системе нулю (деление на 2 без остатка), а стоящая — единице. Таким образом в первом примере мы имеем (читая справо налево) число

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

или в десятичной системе:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

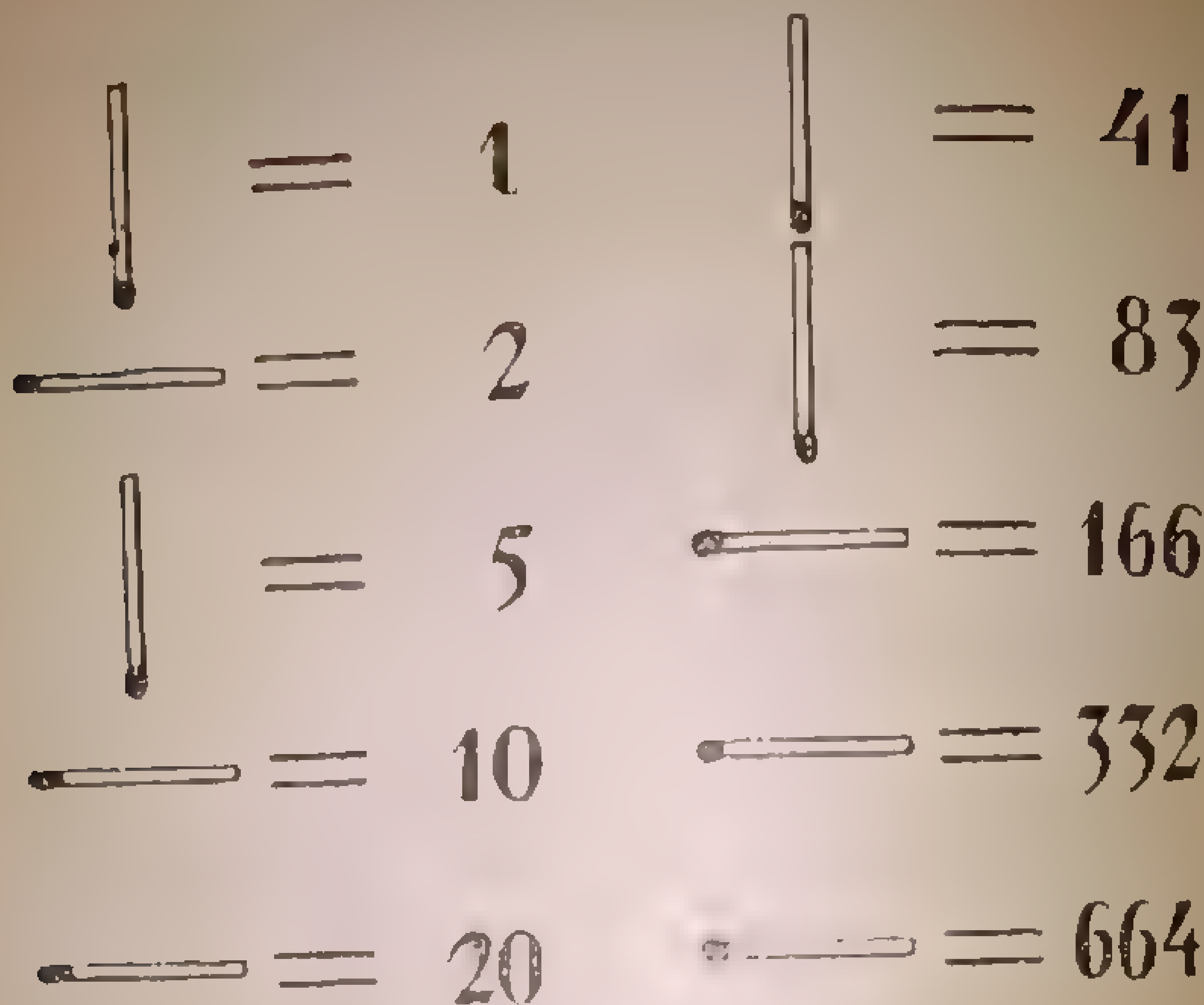


Рис. 15. Ответ на вопрос рис. 14.



Рис. 16. Какое число изображено этой фигурой?

А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе так:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	(256)	128	(64)	(32)	16	8	(4)	(2)	(1)

или по десятичной системе:

$$512+128+16+8=664.$$

Задача № 44

Какое число задумано, если получилась фигура рис. 46.

Решение

Число «10010101» в двоичной системе соответствует в десятичной:

$$128+16+4+1=149.$$

(Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечаема стоящей спичкой.)

ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

Задача № 45

У некоторых читателей вероятно возник уже вопрос, почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно двоичной системой? Ведь каждое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Решение

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме ноля, употребляется всего одна цифра — единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2-х, взятых только по одному разу. Если бы в фокусе с кошельками мы распределили деньги, например, по пятиричной системе, то могли бы составить, но раскрывая кошельков, любую сумму лишь в том случае, когда каждый из кошельков повторяется у нас не менее 4 раз (в пятиричной системе употребляются, ведь, кроме ноля 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а троичной системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о гирях», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Задача № 46-а

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, помощью которых возможно было бы отвесить любое

целое число килограммов, от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

1 *кг*, 2 *кг*, 4 *кг*, 8 *кг*, 16 *кг*,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 *кг*. Но это очевидно не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 *кг* вместо 40). С другой стороны, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться

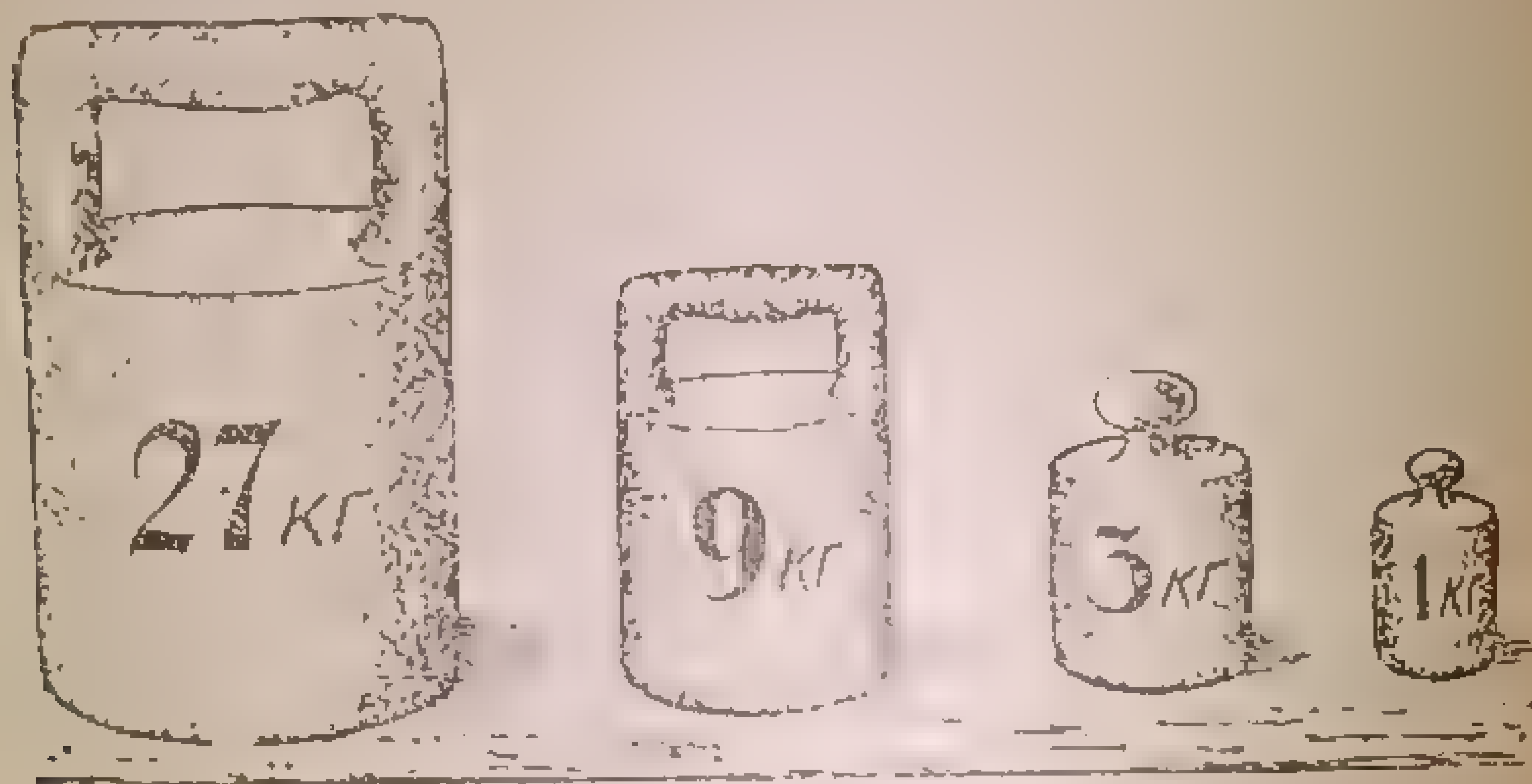


Рис. 47. Помощью этих 4 гирь [illegible] любой груз от 1 до 40 кило.

не только суммою гирь, но и их разностью. Последнее даст так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно потеряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему. Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости задачи столь малым числом гирь, как четыре.

Решение

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1 *кг*, 3 *кг*, 9 *кг*, 27 *кг*.

Любое целое число килограммов, до 40 *кг*, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, почему именно

указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти — ряд степеней числа 3:[1]

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3.$$

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам троичной системы счисления. Гири — цифры этой троичной системы. Но как воспользоваться ею, когда требуемый вес получается в виде разности двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе, ведь, кроме нуля употребляются две цифры: 1 и 2)?

То и другое достигается введением «отрицательных» цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3—1, т. е. единицу высшего разряда, от которой отнимается одна единица низшего. Например число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначается не 2, а $1\bar{1}$, где знак минус над цифрой единицы означает, что единица эта не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а $1\bar{1}\bar{1}$ (т. е. 9 — 3 — 1 = 5).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, — то из чисел 1, 2, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя гири вместо цифр. Случай сложения отвечает при взвешивании случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания, — когда часть гирь кладется на чашку с товаром и, следовательно, вес ее отнимается от веса остальных гирь. Ноль соответствует отсутствию гири.

Вес	Прав. чашка	Лев. чашка	Вес	Прав. чашка	Лев. чашка
1	1	0	21	27+3	9
2	3	1	22	27+3+1	9
3	3	0	23	27	3+1
4	3+1	0	24	27	3
5	9	3+1	25	27+1	[illegible]
6	[illegible]	3	26	27	1
7	9+1	3	27	27	[illegible]
8	9	1	28	27+1	0
9	9	0	29	27+3	1
10	9+1	0	30	27+3	[illegible]
11	9+3	1	31	27+3+1	[illegible]
12	9+3	0	32	27+9	3+1
13	9+3+1	0	33	27+9	3
14	27	9+3+1	34	27+9+1	3
15	27	9+3	35	27+9	1
16	27+1	9+3	36	27+9	0
17	27	9+3	37	27+9+1	0
18	27	9	38	27+9+3	1
19	27+1	9	[illegible]	27+9+3	0
20	27+3	9+1	40	27+9+1	0

Рис. 48. Как взвешивать гирями идеального разновеса.

[1] Единицу можно рассматривать, как нулевую степень 3 (вообще — как нулевую степень любого числа).

Задача № 46-б

Как известно, система эта на практике не употребляется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, — хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым — до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого, казалось бы, совершеннейшего разновеса?

Решение

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен лишь на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц, — например, отвесить 400 г масла или 2500 г сахара, — то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается крайне неудобным: здесь нередко, ради прибавления к поставленным гирям одной единицы, пришлось бы производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях делом крайне медленным и притом утомительным. Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 *кг* получится, если на одну чашку поставить гири в 27 *кг* и 1 *кг*, а на другую 9; вес 20 *кг* — если на одну чашку поставить гири в 27 *кг* и 3 *г*, а на другую — 9 *кг* и 1 *кг*. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ

Задача № 47

Одним из наиболее поражающих «номеров», выполняемых феноменальным советским вычислителем Р. С. Арраго, является молниеносное — с одного взгляда — складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это конечно фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное

числа, по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое, — опять какое угодно. А сам затем быстро пишет третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа — и получается как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83 267, то отгадчик пишет будущую сумму 183 266. Затем вы пишете, допустим, 27 935, а отгадчик приписывает третье слагаемое — 72 064:

I	. . . . Вы:	83267
III	. . . . Вы:	27935
IV	. . . . Отгадчик:	72064
II	. . . . Сумма	183266

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое.— Отгадчик может предсказать также сумму 5 или 7 слагаемых, — но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно отгадчик пользуется каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

Решение

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к пятизначному числу числа из 5 девяток (99999), это число увеличивается на 100000—1, т. е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} 83267 \\ +\ 99999 \\ \hline 183266 \end{array}$$

Эту сумму — т. е. сумму написанного вами числа и 99999 — отгадчик и пишет на бумажке, как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко мо-

жото теперь проследить на предыдущем примере, а также и на следующих:

I. . . . . . . Вы:	379264	I. . . . . . . Вы:	9035
III. . . . . . . Вы:	4873	III. . . . . . . Вы:	5669
IV. Отгадчик:	995126	IV. Отгадчик:	4330
II. . . Сумма:	1379263	II. . . Сумма:	19034

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если второе ваше слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемое, которое уменьшит второе число для оправдания предсказанного слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предусмотрительно ограничивает свободу выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого — например 437692 — отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2437690 (здесь будет добавлено дважды 999999, т. е. 2000000 — 2). Дальнейшее ясно из схемы:

I. . . . . . Вы написали:	437692
III. . . . Другой написал:	822541
V. . . . Третий написал:	263009
IV. . Отгадчик добавил:	177468
VI » »	736990
II Отгадчик предсказал:	2437690

Еще пример:

I. . . . . . Вы написали:	7400
III. . . . Другой написал:	4732
V. . . . Третий написал:	9000
IV. . Отгадчик добавил:	5267
VI » »	999
II Отгадчик предсказал:	27398

МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число с столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая — это умножаемое число,

уменьшенное на единицу; вторая — результат вычитания первой половины из множителя. Например: 247 × 999 = 246753; 1372 × 9999 = 13718628 и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247000 - 247 = 246999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете группе товарищей произвести деление многозначных чисел — одному 68933106 : 6894, другому 8765112348 : 9999, третьему 543456 : 544, четвертому 12948705 : 1295 и т. д., а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде, чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому — 9999, второму 87652, третьему — 999, четвертому — 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерее числовых диковинок» (см. главу V).

ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

Задача № 48

Попросите кого-нибудь сообщить вам его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

— Вот удивительно! — восклицаете вы. — Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

— Чем же она замечательна? — осведомляется заинтересованный собеседник.

— Вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12345679:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение — и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр:

666666666

— Видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, — заканчиваете вы. — Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь замечательным свойством!

Однако, в чем тут дело?

Решение

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую угодно другую из девяти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times 4 \times 9 \\ \hline 444444444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 7 \times 9 \\ \hline 777777777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 9 \times 9 \\ \hline 999999999 \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12345679 в «Галерее числовых диковинок».

УГАДАТЬ ДАТУ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий сильное впечатление.

Задача № 49

Допустим, что вы родились 18 мая и что вам теперь 23 полных года. Я, конечно, не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как число и месяц даты вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$\begin{aligned}
5 \times 100 &= 500\\
500 + 18 &= 518\\
518 \times 2 &= 1036\\
1036 + 8 &= 1044\\
1044 \times 5 &= 5220\\
5220 + 4 &= 5224\\
5224 \times 10 &= 52240\\
51240 + 4 &= 52244\\
52244 + 23 &= 52267
\end{aligned}$$

Произведя вычитание 52267—444, получаем число 51823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

5 — 18 — 23,

т. е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

Решение

Секрет наш легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\left\{\left[(100\,m + t) \times 2 + 8\right] \times 5 + 4\right\} \times 10 + 4 + n -$$
$$- 444 = 10\,000\,m + 100\,t + n$$

Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t — число месяца, n — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения. В выражении $10\,000\,m + 100\,t + n$ ни m, ни t, ни n не могут быть более чем двузначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, расчленяться на три части, выраженные искомыми числами m, t и n.

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

Задача № 50

Предлагаю читателю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в «Арифметике» Магницкого в главе: «Об утешных некиих действиях через арифметику употребляемых».

4 лицѐ :
2 множи :
8
5 приложи :
13
5 множи :
65
5 приложи и перстъ :
70
10 множи :
700
Составъ · 2 приложи :
702
250
452

Рис. 49. Математический фокус из «Арифметики» Магницкого.

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к «каковой-либо иной числимой вещи». Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?

«Он же рече: кто-либо от вас умножи оного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умножи через 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10, и приложи сустав на нем же перстень взложен, и от сих произведенное число скажи им, по нему же искомое получиши.

«Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеша им; якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же

рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше-де-Мезирьяка, в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 г.; а туда она попала из сочинения Леонарда Пизано (1202 г.). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

Решение задачи № 29 (стр. 57)

По четверичной системе — 27; по пятиричной — 38; по шестиричной — 51; по семиричной — 66; по восьмиричной — 83; по девятиричной — 102. — Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет. — Число это по пятиричной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2. — По семиричной системе оно делится на 6, а по девятиричной не делится на 4.

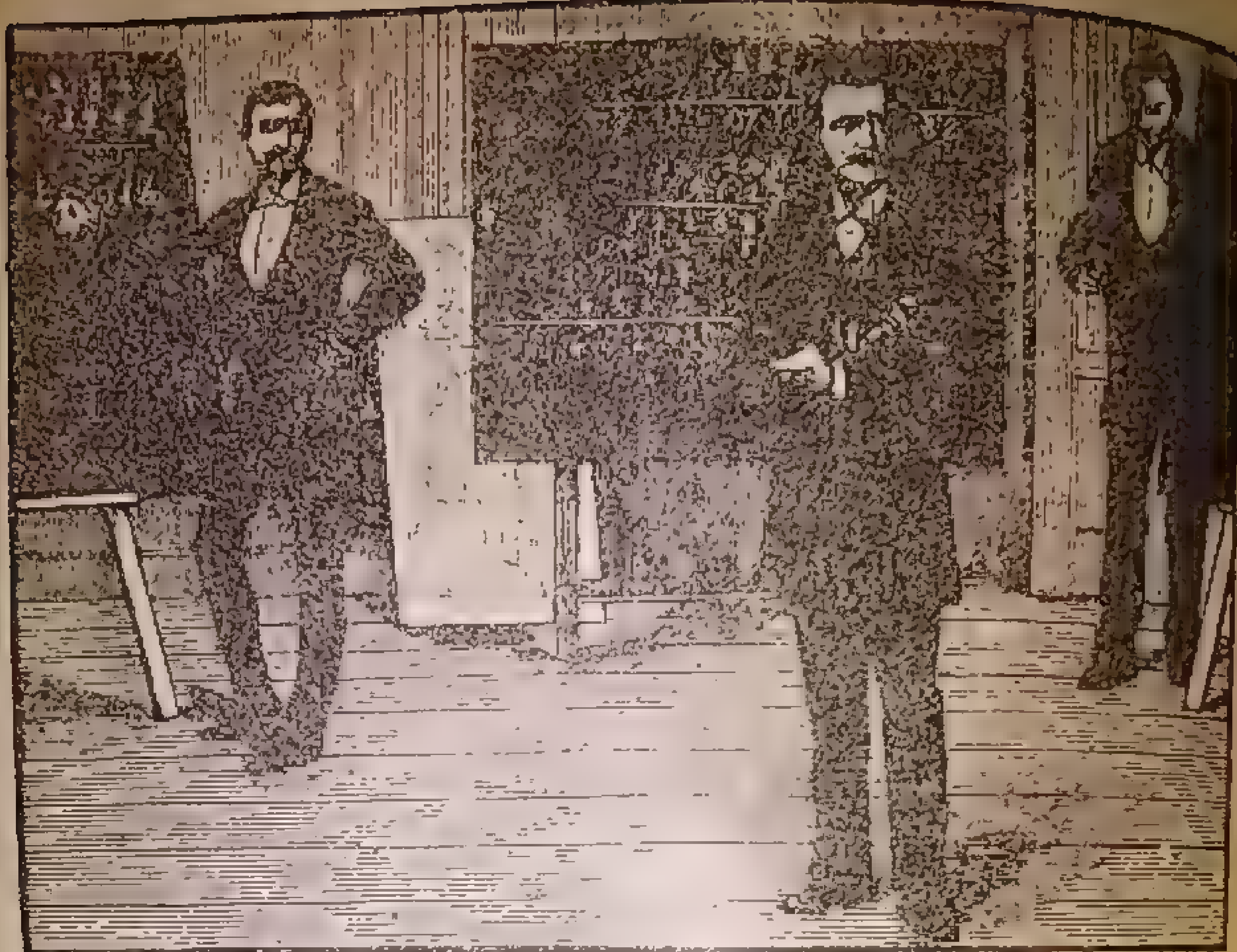


Рис. 50. Французский счетчик-виртуоз Диаманди дает сеанс перед членами Парижской академии наук (1893 г.). — С журнальной иллюстрации того времени.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

БЫСТРЫЙ СЧЕТ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ФЕНОМЕНЫ

Кому приходилось присутствовать на сеансах нашего советского вычислителя Арраго, тот без сомнения не мог не поразиться его изумительными счетными способностями. Тут перед нами уже не фокусы, а редкое природное дарование. Куб числа 4 729, например, Арраго вычислил при мне в уме менее чем в одну минуту (результат 105 756 712 489), а на умножение 679 321 × 887 064, также в уме, употребил всего $1\frac{1}{2}$ минуты.

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми вычислительными приемами он не пользуется, а считает в уме в общем так же, как мы на бумаге. Но не-

...чайная его память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позволяет оперировать с двузначными числами так же легко, как мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей трудности, чем для нас — умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как у нас Арраго или на Западе — Иноди, Диамандп, Рюкле [1] и недавно превзошедший всех д-р Фред Браунс, встречаются единицами. Но наряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода, основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках. Вам быть может приходилось слышать или даже присутствовать на сеансах «гениальных математиков», вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам минуло дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, не нужно однако обладать необычайными математическими способностями. Надо лишь знать кое-какие секреты этих фокусов, — разоблачением которых мы сейчас и займемся.

ЗАПОМИНАНИЕ ЧИСЕЛ

Быстрый вычислитель должен прежде всего обладать превосходно развитой памятью на числа. До какой изощренности достигает такая память у лучших счетчиков, показывают следующие рекорды. Знаменитый немецкий вычислитель Рюкле выучил наизусть число, состоявшее из 504 цифр, в течение 35 минут, а его соотечественник д-р Браунс побил этот рекорд, сделав то же самое менее чем в 13 минут!

Но конечно такой феноменальной памятью наделены от природы лишь отдельные единицы. Профессиональные счетчики, подвизающиеся на эстраде, не обладая прирожденной памятью на числа, помогают себе различными искусственными приемами (так называемыми «мнемоническими»). В обиходной жизни мы и сами зачастую пытаемся пользоваться подобными приемами, большой частью, надо признать, довольно неудачно выбранными. Желая например запомнить номер телефона 25-49, мы возлагаем надежды на то, что число это легко удастся восстановить в памяти, так как оно составлено из двух точ-

[1] Иноди и Диамандп еще здравствуют в наши дни и дают сеансы, Рюкле недавно скончался.

ных квадратов: $25 = 5^2$, $49 = 7^2$. Но когда является надобность действительно вспомнить его, к нашим услугам оказывается безнадежно обширный выбор номеров:

16-25, 36-64, 25-16, 64-16, 81-25 и т. д.

Подобная же неудача постигает нас и в других случаях. Телефон № 17-53 мы собираемся запомнить, пользуясь тем, что сумма первых двух цифр $(1 + 7)$ равна сумме двух последних $(5 + 3)$. Но финал оказывается не лучше, чем в предыдущем случае. А ведь надо еще не спутать, к чьему телефону была применена та и к какому иная комбинация. Можно только удивляться, как упорно люди пытаются пользоваться этим явно негодным приемом. Пристрастие к нему остроумно высмеял писатель Я. Гашек в своих знаменитых «Похождениях солдата Швейка»:

«Швейк разглядывал номер своей винтовки и наконец сказал:

— Номер 4268. Как раз такой номер был у одного паровоза в Печке на шестнадцатом пути. Паровоз надо было увести в Лиссу для ремонта, но это не так-то просто было, потому что у машиниста, который должен был его отвести туда, была очень плохая память на номера. Тогда начальник дистанции вызвал его к себе в канцелярию и говорит ему: «На 16-м пути стоит паровоз № 4268. Я знаю, у вас плохая память на номера, а если вам написать номер на бумажке, то вы бумажку потеряете. Но уж если вы так слабы на номера, то постарайтесь запомнить, что я вам сейчас скажу, и вы увидите, что можно с легкостью заметить себе любой номер. Ну, так вот. Паровоз, который вам надо отвести в депо, значится за номером 4268. Вот и обратите внимание. Первая цифра — четверка, вторая — двойка. Запомните, стало быть, 42, т. е. дважды два — четыре, что дает нам первую цифру, а если разделить ее на два, то получится опять два, и таким образом у нас получается рядом 4 и 2. Дальше уже просто. Сколько будет дважды четыре? Восемь, не так ли? Вот вы и запечатлейте в памяти, что восьмерка в нашем номере является последней цифрой. Теперь вы уже запомнили, что первая цифра — четверка, вторая — двойка, а последняя — восьмерка. Значит, остается только запомнить цифру шесть перед восьмеркой. Но и это совсем просто. Ведь первая цифра у нас 4, вторая 2, а вместе они как раз составляют 6. Вот и номер 4268 крепко засел у вас в голове. Вы можете также притти к результату более простым путем, а именно: из 8 вычесть

2, получится 6. Запомним: 6. Из 6 вычесть два, получится 4. Стало быть имеем уже 4 и 68. Теперь надо только между этими двумя цифрами поставить цифру 2, и получим 4 2 6 8. Можно сделать и еще иначе, тоже весьма просто при помощи умножения. Запомните, что дважды 42 равно 84. В году двенадцать месяцев. Надо вычесть 12 из 84, останется 72, и из 72 еще раз вычесть 12 месяцев. Получится 60. Вот у нас уже есть 6, потому что ноль мы можем просто отбросить. Значит, если мы напишем 42—6—84 и отбросим последнюю 4, то неминуемо получим число 4268, т. е. номер паровоза, который надо отвести.»

Приемы эстрадных счетчиков совершенно иного рода. Вот один из них, который может при случае пригодиться и каждому из нас. Счетчик связывает с цифрами определенные согласные буквы, твердо выученные:

цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
буквы	Н М	Г Ж	Д Т	К Х	Ч Щ	П Б	Ш Л	С З	В Ф	Р Ц

Так как буквы выбраны только согласные, то их можно, не боясь путаницы, сочетать с гласными, составляя короткие словечки. Например:

для чисел	*слова*	*для чисел*	*слова*
1	еж	6	шея
2	яд	7	усы
3	око	8	ива
4	щи	9	яйцо
5	обои		

Сходным образом составляются слова и для двузначных чисел:

11 — гага
12 — год
13 — жук
14 — гуща
15 — губа
16 — игла и т. п.

Чтобы запомнить число 2549, эстрадный счетчик мысленно подписывает под цифрами соответствующие им буквы:

2	5	4	9
д	п	ч	р
т	б	щ	ц

и быстро составляет из них слова, например:

25	49
дуб	ящер

«Дуб» и «ящер» не только легко запомнить, но и связать как-нибудь с фамилией гражданина или названием учреждения, которым принадлежит телефон.

Таков один из мнемонических приемов, употребительных среди эстрадных счетчиков.[1] Существуют и другие, на которых мы однако останавливаться не будем, а перейдем к способам выполнения счетных номеров программы.

— Мне столько-то лет. Сколько мне дней? — спрашивает кто-нибудь из публики и немедленно же получает с эстрады ответ.

— А сколько мне секунд, если возраст мой такой-то? — ставит вопрос другой и также получает быстрый ответ.

Как же выполняются подобные подсчеты?

«СКОЛЬКО МНЕ ДНЕЙ?»

Задача № 51

Чтобы по числу лет быстро определить число дней, счетчик прибегает к такому приему: половину числа лет множит на 73 и приписывает ноль — результат и будет искомым числом. Эта формула станет понятна, если заметить, что $730 = 365 \times 2$. Если мне 24 года, то число дней получим, умножив $12 \times 73 = 876$ и приписав ноль — 8760. Самое умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди.

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет, — в нашем примере $24 : 4 = 6$; общий результат, следовательно, 8766.[2]

---

[1] Подробнее об этом — см. в моей книжке «Фокусы и развлечения».

[2] Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и приведенными далее приемами.

Прием для вычисления числа минут читатель, после сказанного в следующей статье, не затруднится найти самостоятельно.

«СКОЛЬКО МНЕ СЕКУНД?»

Задача № 52

Если возраст спрашивающего выражается четным числом не большим 26, то на этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три поля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

$63 \times 12 = 756$; $72 \times 12 = 864$; результат 756864000.

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы — ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов (к тому же ее можно исправить, прибавив число секунд, отвечающее четвертой части числа лет).

На чем же основан указанный здесь пример?

Решение

Правильность нашей формулы выясняется очень просто Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31536000$. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31536 разбиваем на две части (приписка нолей сама собой понятна). Вместо того чтобы умножать 24×31536, умножают 24 на 31500 и на 36; но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

$$24 \times 31536 = \begin{cases} 24 \times 31500 = 12 \times 63000 = 756000 \\ 24 \times \quad\; 36 = 12 \times \quad\; 72 = \quad\;\; 864 \end{cases}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 756864$$

Остается лишь приписать три поля, и мы имеем искомый результат: 756864000.

ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы.

Некоторые из них весьма несложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что не мешает вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков например прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ не нов; он восходит к грекам и индусам и встарину назывался «способом молнии», или «умножением крестиком». Теперь он забыт, и о нем не мешает напомнить.[1]

Пусть требуется перемножить 24 × 32. Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим

```
2     4
|  ×  |
3     2
```

Теперь последовательно производим следующие действия:

1) $4 \times 2 = 8$ — это последняя цифра результат.

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 — предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3) $2 \times 3 = 6$, да еще удержанная в уме единица, имеем 7 — это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8—768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых «дополнений», удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить 92 × 96. «Дополнение» для 92 до 100 будет 8, для 96 — 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96
дополнения: 8 и 4.

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот; т. е. из 92 вычитают 4, или из 96—8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений»: $8 \times 4 = 32$. Получаем результат 8832.

---

[1] Впрочем в последние годы способ этот снова стал входить в употребление,—главным образом благодаря деятельной пропаганде замечательного германского счетчика инженера Ф. Ферроля. В Америке выдающиеся педагоги высказывались за введение его в школе взамен нынешнего довольно медленного способа.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \left\{\begin{aligned} 88 \times 96 &= 88\ (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 &= \ 4\ \ (88 + 8) = \ \ 4 \times \ \ 8 + 88 \times 4 \end{aligned}\right.$$

$$92 \times 96 \qquad = \qquad 8832 + 0$$

Еще пример:

Требуется перемножить 78 на 77.

Множители: 78 и 77

дополнения: 22 и 23

$$78 \quad - 23 = 55$$

$$22 \quad + 23 = 506$$

$$5500 + 506 = 6006$$

ДЛЯ ОБИХОДНЫХ РАСЧЕТОВ

Существует огромное множество приемов ускоренного выполнения арифметических действий,— приемов, предназначаемых не для эстрадных выступлений, а для обиходных вычислений. Составилась бы целая книга, если задаться целью описать хотя бы только главнейшие из них; такие книги и написаны,— например, имеющаяся на русском языке книга известного французского педагога Мартела «Быстрый счет». Ограничусь поэтому лишь несколькими примерами, из числа наиболее удобоприменимых.

В практике технических и торговых вычислений нередки случаи, когда приходится складывать столбцы чисел, близких друг к другу по величине. Например:

43
38
39
45
41
39
42

Сложение таких чисел значительно упрощается, если воспользоваться следующим приемом, сущность которого легко понять:

$$\left.\begin{aligned} 43 &= 40 + 3 \\ 38 &= 40 - 2 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 45 &= 40 + 5 \\ 41 &= 40 + 1 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 42 &= 40 + 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & 40 \times 7 = 280 \\ & 3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 = 7 \\ & 280 + 7 = 287 \end{aligned}$$

Точно так же находим сумму:

$$\left.\begin{array}{l} 752 = 750 + 2 \\ 753 = 750 + 3 \\ 746 = 750 - 4 \\ 754 = 750 + 4 \\ 745 = 750 - 5 \\ 751 = 750 + 1 \end{array}\right\} 750 \times 6 + 1 = 4501$$

Сходным образом поступают, когда находят арифметическое среднее чисел, близких между собою по величине. Найдем например среднюю из следующих цен:

Р.	Коп.
4	65
4	73
4	75
4	67
4	78
4	74
4	68
4	72

Намечаем на-глаз круглую цену, близкую к средней,— в данном случае, очевидно, 4 р. 70 к. Записываем отклонения всех цен от средней: избытки со знаком $+$, недостатки со знаком$-$.

Получаем:

$$-5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12.$$

Деля сумму отклонений на число их, имеем

$$12 : 8 = 1{,}5$$

Отсюда искомая средняя цена

$$4 \text{ р. } 70 \text{ к.} + 1{,}5 \text{ к.} = 4 \text{ р. } 71^1/_2 \text{ к.}$$

Перейдем к умножению. Здесь прежде всего укажем, что умножение на числа 5, 25 и 125 значительно ускоряется, если иметь в виду следующее:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad 25 = \frac{100}{4}; \quad 125 = \frac{1000}{8}.$$

Поэтому, например,

$$36 \times 5 = \frac{360}{2} = 180; \qquad 87 \times 5 = \frac{870}{2} = 435;$$

$$36 \times 25 = \frac{3600}{4} = 900; \qquad 87 \times 25 = \frac{8700}{4} = 2175;$$

$$36 \times 125 = \frac{36000}{8} = 4500; \qquad 87 \times 125 = \frac{87000}{8} = 10875.$$

При умножении на 15 можно пользоваться тем, что

$$15 = 10 \times 1\frac{1}{2}.$$

Поэтому легко производить в уме вычисления вроде таких:

$$36 \times 15 = 360 \times 1\frac{1}{2} = 360 + 180 = 540,$$

или проще: $36 \times 1\frac{1}{2} \times 10 = 540$

$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1305.$$

При умножении на 11 нет надобности писать 5 строк:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 383 \\ 11 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 383 \\ 383 \end{array} \\ \hline 4213, \end{array}$$

достаточно лишь под умножаемым числом подписать его еще раз, отодвинувши на одну цифру:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 383 \\ 383 \end{array} \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} 383 \\ 383 \end{array} \\ \hline 4213 \end{array}$$

и произвести сложение.

Полезно запомнить результаты умножения первых 9 чисел на 12, 13, 14 и 15. Тогда умножение многозначных чисел на такие множители значительно ускоряется. Пусть требуется умножить

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 4587 \\ 13 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Поступаем так. Каждую цифру множимого умножаем в уме сразу на 13:

$7 \times 13 = 91$; 1 пишем, 9 запоминаем;

$8 \times 13 = 104$; $104 + 9 = 113$; 3 — пишем; 11 — запоминаем;

$5 \times 13 = 65$; $65 + 11 = 76$; 6 — пишем, 7 запоминаем;

$4 \times 13 = 52$; $52 + 7 = 59$.

Итого — 59 631.

После нескольких упражнений прием этот легко усваивается.

Весьма удобный прием существует для умножения двузнач-

ных чисел на 11: надо раздвинуть цифры множимого и вписать между ними их сумму:

$$43 \times 11 = 473.$$

Если же сумма цифр двузначная, то число ее десятков прибавляют к первой цифре множимого:

$$48 \times 11 = 4(12)8, \text{ т. е. } 528.$$

Укажем наконец кое-какие приемы ускоренного деления. При делении на 5 умножают делимое и делитель на 2:

$$3471 : 5 = 6942 : 10 = 694{,}2.$$

При делении на 25 умножают оба числа на 4:

$$3471 : 25 = 13884 : 100 = 138{,}84.$$

Сходным образом поступают при делении на $1\frac{1}{2}$ $(= 1{,}5)$ и на $2\frac{1}{2} = (2{,}5)$:

$$3471 : 1\frac{1}{2} = 6942 : 3 = 2314$$

$$3471 : 2{,}5 = 13884 : 10 = 1388{,}4.$$



Рис. 51. Какие математические тайны скрывают в себе египетские пирамиды?

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАГАДКИ ПИРАМИДЫ ХЕОПСА

Высочайшая пирамиды древнего Египта — Хеопсова, уже пять тысячелетий обвеваемая знойным воздухом пустыни, представляет без сомнения самую удивительную постройку, сохранившуюся от древнего мира. Высотою почти в полтораста метров, она покрывает своим основанием площадь в 40 тысяч квадратных метров и сложена из двухсот рядов исполинских камней. Сто тысяч рабов в течение 30 лет трудились над возведением этого сооружения, — сначала подготовляя 10 лет дорогу для перевозки камней от каменоломни до места постройки, а затем громоздя их 20 лет друг на друга помощью несовершенных машин того времени.

Было бы странно, чтобы такое огромное сооружение воздвигнуто было с единственною целью — служить гробницею для правителя страны. Поэтому некоторые исследователи стали доискиваться: не раскроется ли тайна пирамиды из соотношения ее размеров?

Им посчастливилось, по их мнению, найти ряд удивительных соотношений, свидетельствующих о том, что жрецы, руководители работ по постройке, обладали глубокими познаниями по математике и астрономии и эти познания воплотили в каменных формах пирамиды.

«Геродот [1] рассказывает, — читаем мы в книге французского

[1] Знаменитый греческий историк посетил Египет за 300 лет до нашей эры.

астронома Море («Загадки науки», 1926 г., т. I), — что египетские жрецы открыли ему следующее соотношение между стороной основания пирамиды и ее высотою: квадрат, построенный на высоте пирамиды, в точности равен площади каждого из боковых треугольников. Это вполне подтверждается новейшими измерениями. Вот доказательство, что во все времена пирамида Хеопса рассматривалась как памятник, пропорции которого рассчитаны математически.

Приведу более позднее доказательство: мы знаем, что отношение между длиною окружности и ее диаметром есть постоянная величина, хорошо известная современным школьникам. Чтобы вычислить длину окружности, достаточно умножить ее диаметр на 3.1416.

Математики древности знали это отношение лишь грубо приближенно.

Но вот, если сложить четыре стороны основания пирамиды, мы получим для ее обвода 931,22 метра. Разделив же это число на удвоенную высоту (2 × 148,208) имеем в результате 3,1416, т. е. отношение длины окружности к диаметру. [Другие авторы из тех же измерений пирамиды выводят значение π с еще большею точностью: 3,14159 — *Я. П.*]

Этот единственный в своем роде памятник представляет собою, следовательно, материальное воплощение числа «пи», игравшего столь важную роль в истории математики. Египетские жрецы имели, как видим, точные представления по ряду вопросов, которые считаются открытиями ученых позднейших веков.»[1]

Еще удивительное другое соотношение: если сторону основания пирамиды разделить на точную длину года — 365,2422 суток, то получается как раз 10-миллионная доля земной полуоси, с точностью, которой могли бы позавидовать современные астрономы...

Далее: высота пирамиды составляет ровно миллиардную долю расстояния от Земли до Солнца — величины, которая европейской науке стала известна лишь в конце XVIII века. Египтяне 5000 лет назад знали, оказывается, то, чего не знали еще ни современники Галилея и Кеплера, ни ученые эпохи Ньютона. Неудивительно, что изыскания этого рода породили на Западе обширную литературу.

---

[1] Значение «пи» с тою точностью, которая получена здесь из соотношений размеров пирамиды, стало известно европейским математикам только в XVI веке.

А между тем, все это — не более, как игра цифрами. Дело представится совсем в другом свете, если подойти к нему с оценкой результатов приближенных вычислений.

Рассмотрим же по порядку те примеры, которые мы привели.

1) О числе «пи». Арифметика приближенных чисел утверждает, что если в результате действия деления желаем получить число с шестью верными цифрами (3,14159), мы должны иметь в делимом и делителе по крайней мере столько же верных цифр. Это значит, — в применении к пирамиде, — что для получения шестизначного «пи» надо было измерить стороны основания и высоту пирамиды с точностью до миллионных долей результата, т. е. до одного миллиметра. Астроном Моро приводит для высоты пирамиды 148,208 *м*, на первый взгляд как будто действительно с точностью до 1 *мм*.

Но кто поручится за такую точность измерения пирамиды? Вспомним, что в лабораториях Института мер (ВИМС), где производятся точнейшие в мире измерения, — не могут при измерении длины добиться такой точности (получают при измерении длины лишь 6 верных цифр). Понятно, насколько грубее может быть выполнено измерение каменной громады в пустыне. Правда, при точнейших землемерных работах (при измерении так называемых «базисов») можно и на местности достичь такой же точности, как и в лаборатории, т. е. ручаться за 6 десятичных знаков. Но, конечно, невозможно осуществить это в условиях измерения пирамиды. К тому же, истинных, первоначальных размеров пирамиды давно нет в натуре, так как облицовка сооружения выветрилась, и никто не знает, какой она была толщины. Чтобы быть добросовестным, надо брать размеры пирамиды в целых метрах; а тогда получается довольно грубое «пи», — не более точное, чем то, которое давно известно из математического папируса Ринда.

Если пирамида действительно есть каменное воплощение числа «пи», то воплощение это, как видим, — далеко не совершенное. Но вполне допустимо, что пирамида не сооружена ради выражения именно этого соотношения. В пределы приближенных трехзначных чисел для размеров пирамиды хорошо укладываются и другие допущения. Возможно, например, что для высоты пирамиды было взято $^{2}/_{3}$ ребра пирамиды или $^{2}/_{3}$ диагонали ее основания. Вполне допустимо и то соотношение, которое было указано Геродотом: что высота пирамиды есть квадратный корень из площади боковой грани. Все это — догадки, столь же вероятные, как и «гипотеза пи».

2) Следующее утверждение касается продолжительности года и длины земного радиуса: если разделить сторону основания пирамиды на точную длину года (число из 7 цифр), то получим в точности 10-миллионную долю земной оси (число из 5 цифр). Но раз мы уже знаем, что в делимом у нас не больше трех верных цифр, то ясно, какую цену имеют здесь эти 7 и 5 знаков в делителе и в частном. Арифметика может ручаться в этом случае только за 3 цифры в длине года и земного радиуса. Год в 365 суток и земной радиус около 6400 километров — вот числа, о которых мы в праве здесь говорить.

3) Что же касается расстояния от Земли до Солнца, то здесь недоразумение иного рода. Странно даже, как приверженцы теории могут не замечать допускаемой ими здесь логической ошибки. Ведь, если, как они утверждают, сторона пирамиды составляет известную долю земного радиуса, а высота — известную долю основания, то нельзя уже говорить, будто та же высота составляет определенную долю расстояния до Солнца. Что-нибудь одно — либо то, либо другое. А если случайно тут обнаруживается любопытное соответствие обеих длин, то оно всегда существовало в нашей планетной системе, и никакой заслуги жрецов в этом быть не может.

Сторонники рассматриваемой теории идут еще далее: они утверждают, что масса пирамиды составляет ровно одну тысячебиллионную долю массы земного шара. Это соотношение, по их мнению, не может быть случайным и свидетельствует о том, что древне-египетские жрецы знали не только геометрические размеры нашей планеты, но и задолго до Ньютона и Кавендиша исчислили ее массу, «взвесили» земной шар.

Здесь та же самая нелогичность, что и в примере с расстоянием от Земли до Солнца. Совершенно нелепо говорить о том, будто масса пирамиды «выбрана» в определенном соответствии с массою земного шара. Масса пирамиды определилась с того момента, как назначены были размеры ее основания и высоты. Нельзя одновременно сообразовать высоту пирамиды с основанием, составляющим определенную долю земного радиуса, — и независимо от этого ставить ее массу в связь с массою Земли. Одно определяется другим. Значит, должны быть отвергнуты всякие домыслы о знании египтянами массы земного шара. Это — не более как числовая эквилибристика. Искусно оперируя с числами, опираясь на случайные совпадения, можно доказать, пожалуй, все что угодно.

Мы видим, на каких шатких основаниях покоится легенда о непостижимой учености жрецов-архитекторов пирамиды. А попутно мы имеем тут и маленькую наглядную демонстрацию пользы того отдела арифметики, который занимается приближенными числами.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Кто незнаком с правилами действий над приближенными числами, тому вероятно интересно будет хотя бы вкратце с ними ознакомиться, тем более что знание этих простых приемов оказывается и практически полезным, сберегая труд и время при вычислениях.

Объясним прежде всего, что такое приближенное число и откуда такие числа получаются.

Данные, входящие в технические расчеты, получаются путем измерения. Но никакое измерение не может быть выполнено совершенно точно. Прежде всего уже самые меры, которыми пользуются для измерения, обычно заключают в себе погрешность. Изготовить совершенно точные метровые линейки, килограммовую гирю, литровую кружку — чрезвычайно трудно, и закон допускает при их изготовлении некоторую погрешность. Например, при изготовлении метровой линейки допускается законом погрешность до 1 миллиметра; для 10-метровой землемерной цепи или ленты — до 1 сантиметра; для килограммовой гири — до 1 грамма;[1] для разновески в 1 грамм — до 0,01 грамма; для литровой кружки—до 5 *куб. см.*

Кроме того, выполнение измерения вводит еще неточности. Пусть вы измеряете какое-нибудь расстояние, например ширину улицы. Мера, метр, отложилась в ее ширине, допустим, 13 раз, и еще остался кусочек меньше метра. Вы можете сказать, что ширина улицы 13 метров; на самом деле, однако, она равна 13 целым метрам и еще некоторому числу десятых, сотых и т. д. долей метра, которых вы не учли. Следовательно, результат вашего измерения можно изобразить так:

ширина улицы = 13,??? метра,

где вопросительные знаки означают неизвестные нам цифры десятых, сотых и т. д. долей.

---

[1] Помимо погрешности в гирях, закон допускает погрешность и в устройстве весов, доходящую, например, в столовых весах до 1 грамма на каждый килограмм отвешиваемого груза.

Если бы вы пожелали измерить ширину улицы точнее, вы узнали бы, сколько в остающемся кусочке содержится дециметров (десятых долей метра). Допустим, что дециметров содержится 8 и еще имеется некоторый остаток, меньший дециметра. Результат нового измерения, 13,8 *м*, будет точнее предыдущего, но и он не строго точен, потому что, кроме 8 десятых метра, в ширине улицы заключается еще некоторое неизвестное нам число сотых, тысячных и т. д. долей метра. Следовательно, полученный сейчас более точный результат мы можем выразить так:

13,8?? метра.

При еще более тщательном измерении вы учтете сотые доли метра (сантиметры) в откинутом остатке, но пренебрежете остатком, меньшим сантиметра; значит, и этот результат не будет абсолютно точен. Вообще, как бы аккуратно вы ни мерили, никогда не можете вы быть твердо уверены, что далее последней полученной нами цифры не находятся еще другие, вам неизвестные.

Дело конечно нисколько не меняется от того, что при измерениях остатки, большие половины единицы меры, обычно считаются за целые. Если бы при первом измерении улицы мы считали ее ширину не 13 метров, а 14, — это также был бы лишь приближенный результат. Его можно было бы выразить так:

14,??? метров,

где вопросительные знаки означают **отрицательные** цифры (т. е. показывают, на сколько десятых, сотых и т. д. долей число 14 больше истинной ширины улицы).

Итак, результат даже самого тщательного измерения не может быть рассматриваем как совершенно точный: он выражает истинную величину лишь более или менее приближенно. Такие числа называются **приближенными**.

Арифметика приближенных чисел не во всем сходна с арифметикой чисел точных. Покажем это различие на примере.

Пусть требуется вычислить площадь прямоугольного участка, длина которого 68 *м*, а ширина — 42 *м*. Если бы числа 68 и 42 были точные, площадь участка в точности равнялась бы

$$68 \times 42 = 2856 \text{ кв. м.}$$

Но числа 68 и 42 не точные, а приближенные: в длине не ровно 68 *м*, а немного больше или меньше, так как невероятно, чтобы метр укладывался в ней в точности 68 раз

Да и самая длина метровой линейки едва ли в точности была равна 1 *м*. Мы можем, согласно предыдущему, выразить длину участка в метрах так:

68,?

Подобным же образом и ширину участка выразим через

42,?

Проделаем теперь умножение приближеных чисел:

68,? × 42,?

Выполнение действия видно из следующей схемы:

```
 × 68,?
   42,?
 ──────
    ???
   136?
  272?
 ──────
  285?,??
```

Мы видим, что четвертая цифра результата нам неизвестна: она должна получиться от сложения трех цифр (? + 6 + ?), из которых две неизвестны. Недостоверна также и третья цифра результата: мы записали 5, но ведь от сложения столбца ? + 6 + ? могло получиться число больше 10 и даже 20; значит, вместо 5 может оказаться и 6, и 7. Вполне надежны только первые две цифры результата (28). Поэтому, желая быть добросовестными, мы должны утверждать лишь, что искомая площадь заключает около 28 сотен кв. метров. Каковы цифры десятков и единиц в числе кв. метров, — нам неизвестно.

Итак правильный ответ на вопрос задачи — 2800, причем нули здесь означают не заведомое отсутствие единиц соответствующих разрядов, а лишь отсутствие достоверных знаний о них. Иначе говоря, нули означают здесь то же, что и вопросительные знаки в предыдущих обозначениях.

Ошибочно думать, что ответ 2856, полученный по правилам арифметики точных чисел, вернее ответа 2800. Ничуть: ведь мы видели, что последние две цифры результата (56) доверия не заслуживают: поручиться за них нельзя. Ответ 2800 предпочтительнее, чем 2856, потому что он не вводит в заблуждение; он прямо утверждает, что достоверны лишь цифры 2 и 8 на место тысяч и сотен, а какие цифры идут дальше — неизвестно. Ответ же 2856 обманчив: он внушает неверную

мысль, будто последние две цифры столь же надежны, как и первые две.

«Нечестно писать больше цифр, чем столько, за сколько мы можем ручаться... Мне очень грустно признаться, что не мало таких чисел, ведущих к превратным представлениям, встречается в лучших сочинениях о паровых машинах... Когда я учился в школе, нам сообщали что среднее расстояние от Земли до Солнца 95 142 357 англ. миль. Я удивляюсь, почему не было упомянуто, сколько еще футов и дюймов. Наиболее точные современные измерения позволяют лишь утверждать, что это расстояние не больше 93 и не меньше 92,5 миллионов миль», — писал по этому поводу английский математик Перри.

Итак, при выкладках с приближенными числами надо принимать во внимание не все цифры результата, а только некоторые. О том, какие именно цифры следует в этих случаях удерживать и какие заменять нулями, мы будем говорить особо. Остановимся сначала на том, как надо о к р у г л я т ь числа.

ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Округление числа при выкладках состоит в том, что одну или несколько цифр на его конце заменяют нулями. Так как нули, стоящие после запятой, не имеют значения, то их отбрасывают вовсе. Например;

числа	*округляют в*
3734	3730 или 3700
5,314	5,31 или 5,3
0,00731	0,0073 или 0,007

Если первая из отбрасываемых при округлении цифр есть 6 или больше, то предыдущую увеличивают на единицу. Например:

числа	*округляют в*
4867	4870 или 4900
5989	5990 или 6000
3,666	3,57 или 3,7

Так же поступают, если отбрасывается цифра 5 с последующими за нею значащими цифрами. Например:

числа	*округляют в*
4552	4600
38,1506	38,2

Но если отбрасывается только цифра 5, то увеличивать на единицу предшествующую цифру условились лишь тогда, когда она нечетная; четную же цифру оставлять без изменения. Например:

числа	*округляют в*
735	740
8645	8640
37,65	37,6
0,0275	0,028
70,5	70[1]

При обработке результатов действий над приближенными числами руководствуются теми же правилами округления.

ЦИФРЫ ЗНАЧАЩИЕ И НЕЗНАЧАЩИЕ

Под значащими цифрами в учении о приближенных вычислениях разумеют все цифры, кроме ноля, а также и ноль в том случае, если он стоит между другими значащими цифрами. Так, в числах 3700 и 0,0062 все ноли — незначащие цифры; в числах же 105 и 2006 ноль значащие. В числе 0,0708 первые два ноля — незначащие, третий же ноль — значащая цифра.

В некоторых случаях значащий ноль может находиться и в конце числа; округляя, например, число 2,540002, мы получаем число 2,54000, в котором все ноли на конце — значащие, так как указывают на заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах. Поэтому, если в условии задачи или в таблице мы встречаем числа 4,0 или 0,80, то должны рассматривать их, как двузначные. Округляя число 289,9 в 290, мы также получаем на конце значащий нуль.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат сложения или вычитания приближенных чисел не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которые отсутствуют хотя в одном из данных чисел. Если такие цифры получились, их следует отбросить посредством округления.

$$\begin{array}{r} 3400 \\ +\ 270 \\ \hline 3700 \end{array}$$
(а не 3675)

$$\begin{array}{r} 28,3 \\ +\ 146,85 \\ 108 \\ \hline 283 \end{array}$$
(а не 283,15)

$$\begin{array}{r} 176,3 \\ -\ 0,46 \\ \hline 175,8 \end{array}$$
(а не 175,84)

[1] Ноль рассматривают как четную цифру.

Нетрудно понять основание этого правила. Пусть требуется к 3400 м прибавить 275 м. В числе 3400 мерщик, очевидно, пренебрег десятками метров; ясно, что, прибавив к этому числу 7 десятков метров и еще 5 м, мы получим в сумме не 3675 м, а скорее всего результат с иными цифрами на месте десятков и единиц. Поэтому на место десятков и единиц мы пишем в сумме нули, которые в данном случае указывают, что вычислителю неизвестно, какие именно цифры должны здесь стоять.

УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ И ВОЗВЫШЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат умножения, а также деления приближенных чисел не должен заключать больше значащих цифр, чем имеется их в более коротком данном. (Из двух чисел то «короче», которое содержит меньше з н а ч а щ и х цифр.) Лишние цифры заменяют нулями.

П р и м е р ы:

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 245 \\ \hline 9100 \end{array}$$

(а не 9065)

$57,8 : 3,2 = 18$ (а не 18,06);
$25 : 3,14 = 8,0$ (а не 7,961).

При подсчете числа цифр не обращают на запятую внимания; так, 4,57 есть число трехзначное и т. п.

Число значащих цифр степени приближенного числа не должно превышать числа их в основании степени. Излишние цифры заменяются нулями.

П р и м е р ы:

$157^2 = 24\,600$ (а не 24 649);
$5,81^3 = 196$ (а не 196,122941).

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

Правила эти относятся лишь к результатам окончательным. Если же выполняемым действием расчет еще не заканчивается, то в результате такого промежуточного действия удерживают одной значащей цифрой больше, чем требуют правила. Выполняя, например, вычисление

$$\frac{36 \times 1,4}{3,4},$$

поступают так:

$36 \times 1,4 = 50,4$ (удерживают не две, а три цифры);
$50,4 : 3,4 = 15.$

При несложных технических расчетах указанные выше правила могут быть почти во всех случаях применяемы следующим упрощенным образом. Прежде чем вычислять, устанавливают по числу цифр самого короткого данного, сколько достоверных цифр может заключать окончательный результат. Когда это установлено, приступают к выкладкам, причем во всех промежуточных выкладках удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата. Если, например, в условии задачи дано несколько трехзначных чисел и одно двухзначное, то окончательный результат будет иметь две достоверных цифры, а промежуточные результаты надо брать с тремя цифрами.

Итак все правила приближенных вычислений могут быть при выполнении расчетов сведены к двум следующим:[1]

1) устанавливают, сколько значащих цифр в самом коротком из данных задачи: столько же значащих цифр нужно будет удержать в окончательном результате;

2) в результате всех промежуточных вычислений удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата.[2]

СБЕРЕЖЕНИЕ СЧЕТНОГО ТРУДА

Как оценить, сколько вычислительной работы сберегаем мы, пользуясь изложенными сейчас приемами? Для этого надо какой-нибудь сложный расчет выполнить двояко: один раз — по обычным арифметическим правилам, другой — приближенно. А затем терпеливо подсчитать, сколько раз при том и другом подсчете приходилось нам складывать, вычитать и умножать отдельные цифры. Окажется, что приближенный расчет потребует таких элементарных операций в $2^1/_2$ раза меньше, чем «точный». Ущерба же для правильности результата в приближенном расчете нет никакого.

Итак, приближенные вычисления требуют примерно в $2^1/_2$ раза меньше времени, нежели вычисление по обычным правилам. Но это еще не все сбережение времени, какое при этом достигается. Ведь каждая лишняя счетная операция, каждый

---

[1] Правило это не относится к тем расчетам (редким на практике), которые решаются только действиями сложения и вычитания. Для них пользуются другим правилом: итог не может оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из данных расчета.

[2] Подробнее о приближенных вычислениях — см. мою брошюру: «Таблицы и правила для вычислений» (ОГИЗ, 1931).

лишний случай сложения, вычитания или умножения цифр являются лишним поводом сделать ошибку. Вероятность ошибиться при приближенных выкладках в $2^{1}/_{2}$ раза меньше, чем при «точных». А стоит хоть раз ошибиться — и вычисление придется переделать заново, если не все целиком, то часть его. Значит, сбережение труда и времени при приближенных расчетах получается во всяком случае больше, чем в $2^{1}/_{2}$ раза. Время, затраченное на ознакомление с ними, вознаграждается очень быстро и щедро.

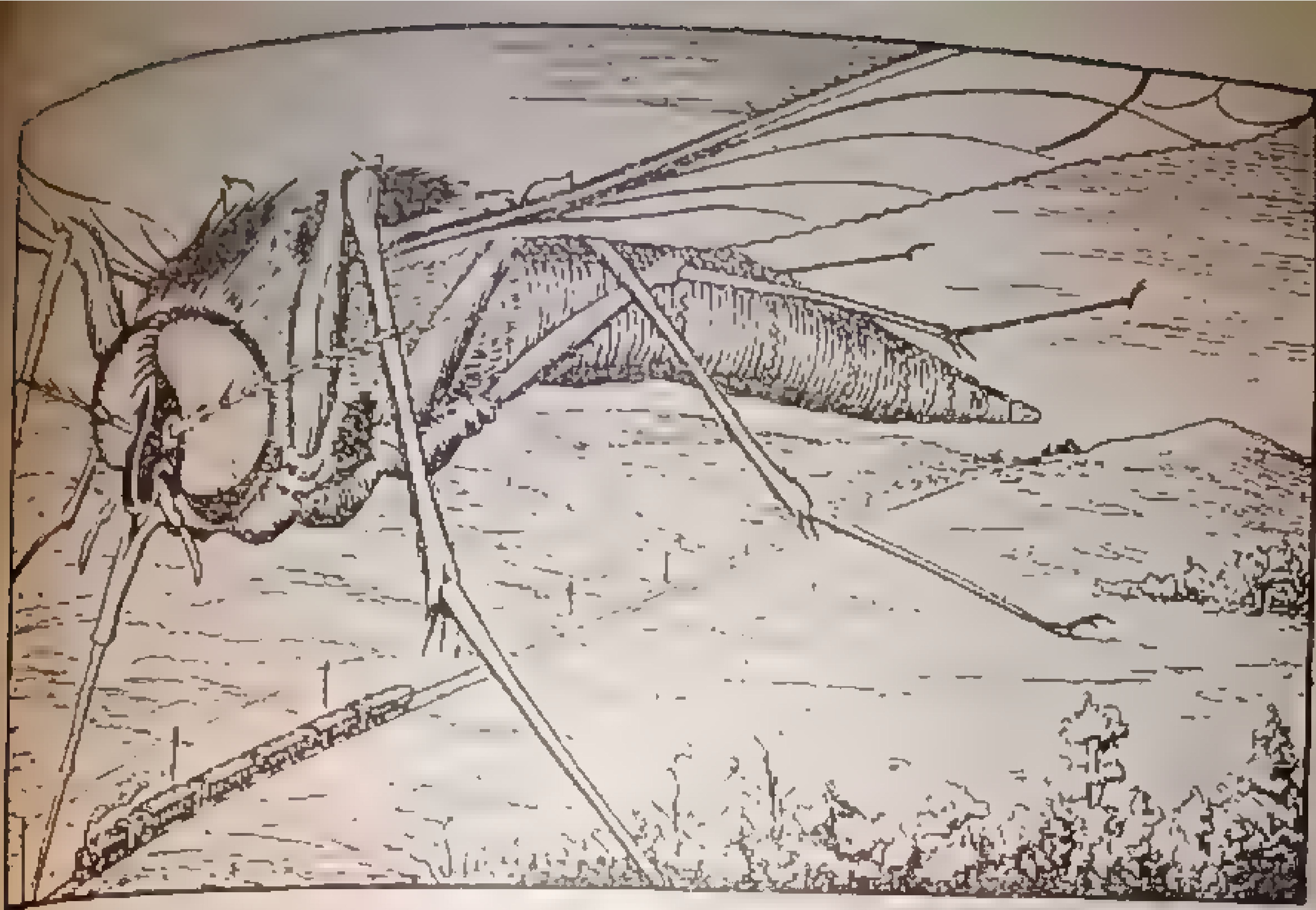


Рис. 52. Комар при увеличении в миллион раз.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ

КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Величественная внушительность числовых великанов — миллиона, миллиарда, даже триллиона — заметно померкла для нас в те годы, когда числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь. Когда месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигали миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражался триллионами, естественна была мысль, что эти прежде недоступные воображению числа вовсе не так огромны, как твердили нам до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которые не давали и полной крынки молока. Не подавляет ума миллиард, на который не купишь сапог.

Но было бы заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов со своих недосягаемых высот в прозу житейского обихода мы познакомились с ними лучше, чем раньше. Миллион попрежнему остается для большинства людей тем, чем и был, — «знакомым незнакомцем». Скорее даже наоборот: ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были уменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего воображения. Когда

же миллионными числами стали выражаться весьма скромные в сущности ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера довольно обыкновенного, легко постигаемого числа. Мы впадали в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относили не за счет уменьшения денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона. Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, простодушно воскликнул:

— Только всего?

Другой, прочтя (в 1921 г.), что от Ленинграда до Москвы миллион шагов, заметил:

— Только один миллион шагов до Москвы? А мы платим за билет двести миллионов!..

Для тех, кто не отдает себе достаточно ясного отчета в огромности миллиона и миллиарда, остаются не вполне осознанными колоссальные достижения нашего соцстроительства, выражающиеся миллионными и миллиардными числами. Когда вы читаете например, что к концу второй пятилетки выплавка чугуна будет доведена до 16 миллионов тонн в год, — какой образ всплывает в вашем уме? Чтобы ощутить грандиозность подобных чисел, стоит затратить немного времени на «арифметическую гимнастику», развивающую способность правильно оценивать подлинные размеры больших чисел.

Начнем с миллиона — старейшего числового великана (наименование миллион впервые появилось в 1500 г. в Италии).

Если хотите ощутить истинные размеры миллиона — попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (едва ли у кого на это достанет терпения); уже одно начало работы, медленный ее ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллес, знаменитый сподвижник Дарвина, придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал[1] «в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в $4^1/_2$ фута каждый, разграфленных квадратиками в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждое 10 пятен нужно оставлять

---

[1] В книге «Положение человека во вселенной».

двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10 × 10). Таким образом на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна, особенно в стране, где о миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения. Между тем никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если неспособен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число один миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионами таких миллионов.[1] Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показания на ее стенах величины одного миллиона».

Я предложил осуществить это на потолке одной из зал Дома занимательной науки в Ленинграде. Здесь я предлагаю другой, более доступный для каждого способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете мелких, но хорошо знакомых нам единиц — шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные и поразительные.

Приведем несколько примеров.

МИЛЛИОН СЕКУНД

Задача № 53

Сколько времени отняла бы у вас работа — пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному каждую секунду?

Решение

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени! Приблизительно удостовериться в этом нетрудно устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах — 36 000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 тысяч предметов; а так

[1] Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояния звезд — миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха — миллионами миллионов миллионов. — *Я. П.*

как миллион в десять раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней.[1]

Отсюда следует между прочим, что предложенная ранее работа — поставить в тетради миллион точек — потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда.[2] Да и тетрадь для этого понадобилась бы страниц в тысячу. Тем не менее такой труд был однажды выполнен. В распространенном английском журнале я видел как-то воспроизведение страницы из тетради, «единственное содержание которой составляет миллион аккуратно расставленных точек, по тысяче на странице». Все 500 листов этой тетради были разграфлены карандашом и заполнены рукой одного беспримерно терпеливого учителя чистописания в середине прошлого столетия.

В МИЛЛИОН РАЗ ТОЛЩЕ ВОЛОСА

Задача № 54

Тонкость волоса вошла чуть не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса — около 0,07 *мм*. Мы закруглим ее до 0,1 *мм*. Представьте себе однако, что толщина волоса стала в миллион раз больше, — какова бы она тогда была? Волос сделался бы толщиной в руку? В бревно? Или в большую бочку? Или может быть ширина волоса достигла бы ширины комнаты средних размеров?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления, вы дадите грубо ошибочный ответ. Вы будете пожалуй даже оспаривать правильный ответ, — настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

---

[1] Отметим, для сведения, что в году (астрономическом) 31 558 150 секунд: миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 час. 46 мин. 40 сек.

[2] До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает поучительное заблуждение самого Уоллеса: предостерегая других от преуменьшения миллиона, он заканчивает приведенный выше (стр. 128—129) отрывок таким советом:

«В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой конечно степени, как осуществленное в большом масштабе». Почтенный автор повидимому полагал, что работа эта вполне под силу одному человеку.

Решение

Оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы около сотни метров в поперечнике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть: 0,1 *мм* × 1 000 000 = 0,1 *м* × 1000 = = 0,1 *км* = 100 *м*[1]

УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Проделайте — лучше всего устно — еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиной миллиона.

Задача № 55

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна — около 7 *мм* в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

Решение

Умножим 7 *мм* на 1 000 000, получим 7 *км* — примерно ширина Москвы или Ленинграда. Значит муха, увеличенная линейно в миллион раз, могла бы покрыть своим телом столичный город!

Задача № 56

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы, — и получите снова поражающий результат; едва ли вам удастся предугадать его без расчета. Какой?

Решение

Часы имели бы в ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на географическую милю (7 *км*).

Задача № 57

Какого роста достигал бы человек в миллион раз выше обычного роста?

---

[1] Мы проделали здесь умножение следующим путем: вместо умножения числа, мы дважды заменили самую единицу меры другою, в тысячу раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

Решение

1700 километров! Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Финского залива до Крыма...

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав миллион шагов по одному направлению, вы отошли бы километров 600. От Москвы до Ленинграда примерно и будет миллион шагов.

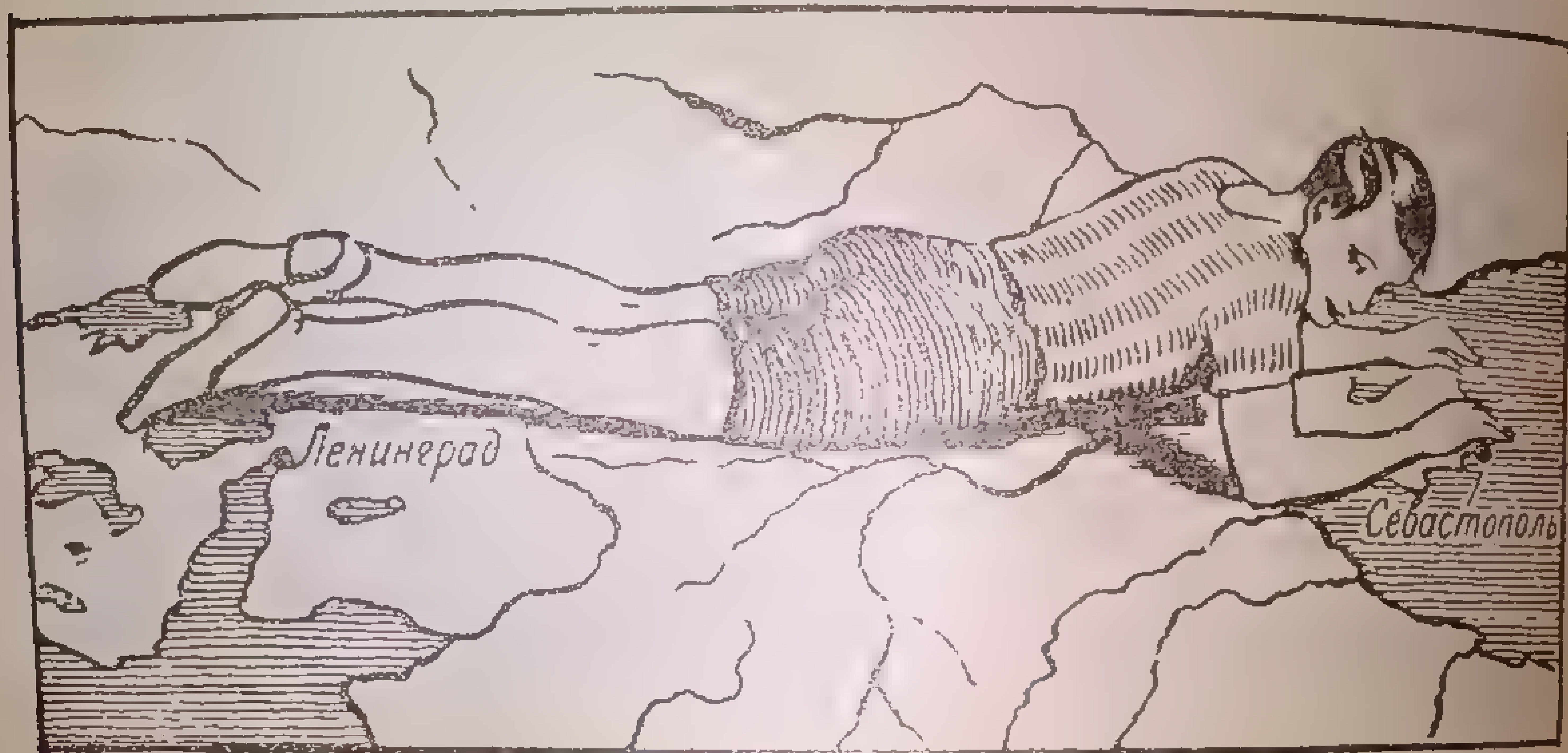


Рис. 53. Человек, увеличенный в миллион раз, растянулся бы от Финского залива до Крыма.

Миллион человек, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 *км*.

Миллион точек типографского шрифта, — например, этой книги, — поставленных рядом вплотную, вытянулись бы в линию длиною в сотню метров.

Зачерпывая миллион раз наперстком, вы вычерпаете около тонны воды.

Книга в миллион страниц имела бы в толщину метров 50.

Миллион букв заключает книга убористой печати в 600—800 страниц среднего формата.

Миллион дней — более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

ЧИСЛОВЫЕ ИСПОЛИНЫ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ ИНДУСТРИИ

После проделанной тренировки обратимся к исполинским числам нашего социалистического производства. Возьмем несколько примеров.

Производственное задание по хлопчатобумажным тканям на 1934 г. утверждено ЦИК СССР в количестве 2 927 100 000 метров.

Мы теперь лучше подготовлены, чтобы правильно оценить грандиозность подобных чисел. Если бы кто-нибудь пожелал

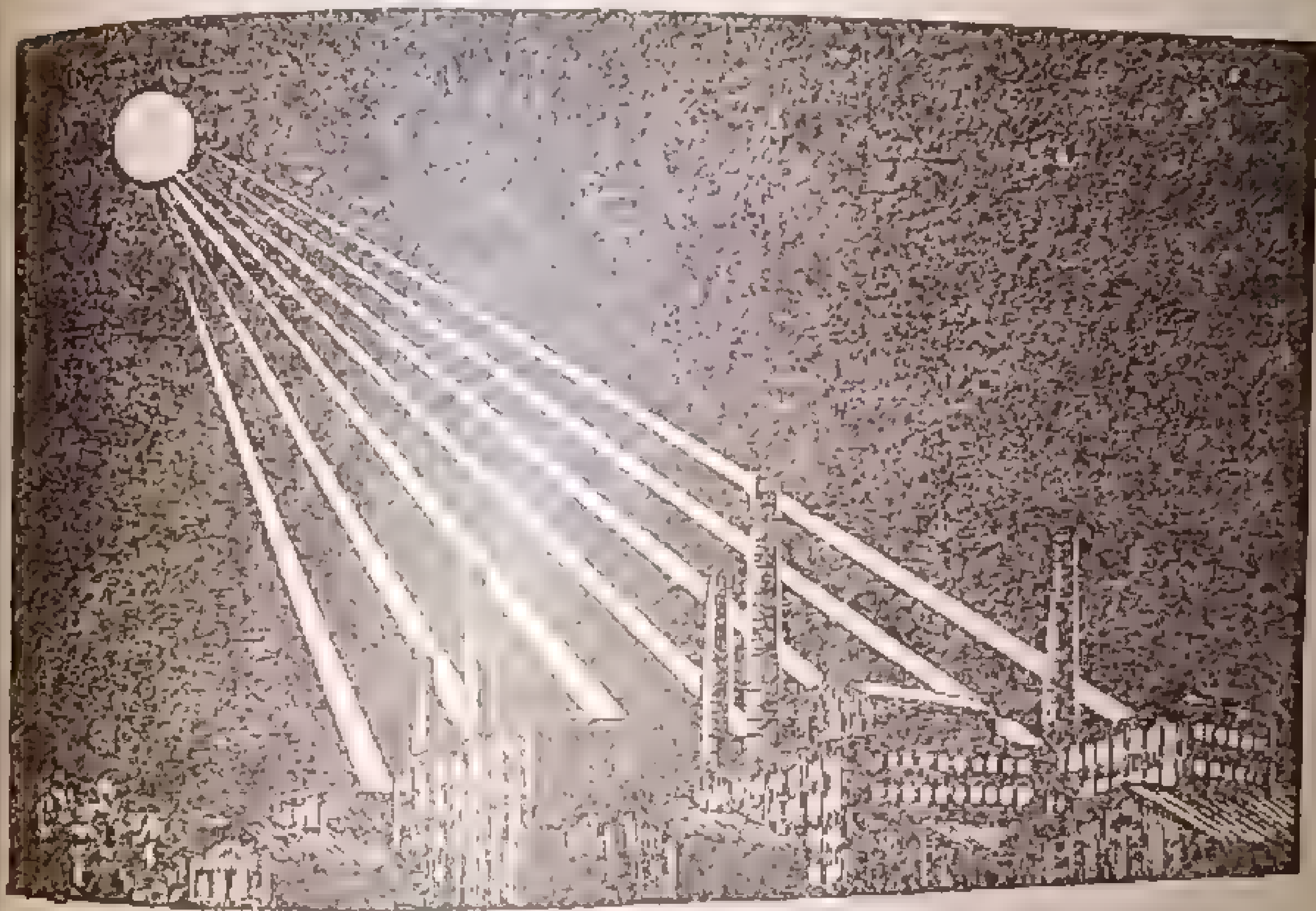


Рис. 51. Продукция хлопчатобумажной промышленности в 1934 г.

перемерить всю эту выработку шерстяной ткани, по метру в секунду, он должен был бы мерить по 10 часов ежедневно в течение 300 лет. А если представить себе все штуки этой ткани развернутыми и соединенными в одну полосу метровой ширины, то такой полосой можно было бы окружить земной шар по экватору 75 раз. Подобную ленту можно было бы протянуть между Землей и Луной семь раз.

Далее. Задание по каменному углю утверждено в количестве 96 250 000 тонн. Для вас не будет теперь неожиданностью, что эта добыча, погруженная в вагоны, заняла бы железнодорожный путь, который может охватить нашу планету по экватору.

Немногим короче был бы поезд, составленный из вагонов и платформ, поданных для доставки всех грузов на территорию строительства ДнепроГЭС.

Число учащихся в СССР в школах всех ступеней в 1933 г. достигало, как это известно из доклада тов. Сталина на XVII съезде ВКП(б), 26 419 000 человек. Вы лучше оцените величину этого числового исполина, если представите себе, что все учащиеся взялись за руки, образовав одну цепь: этой цепью можно было бы охватить земной шар по экватору.

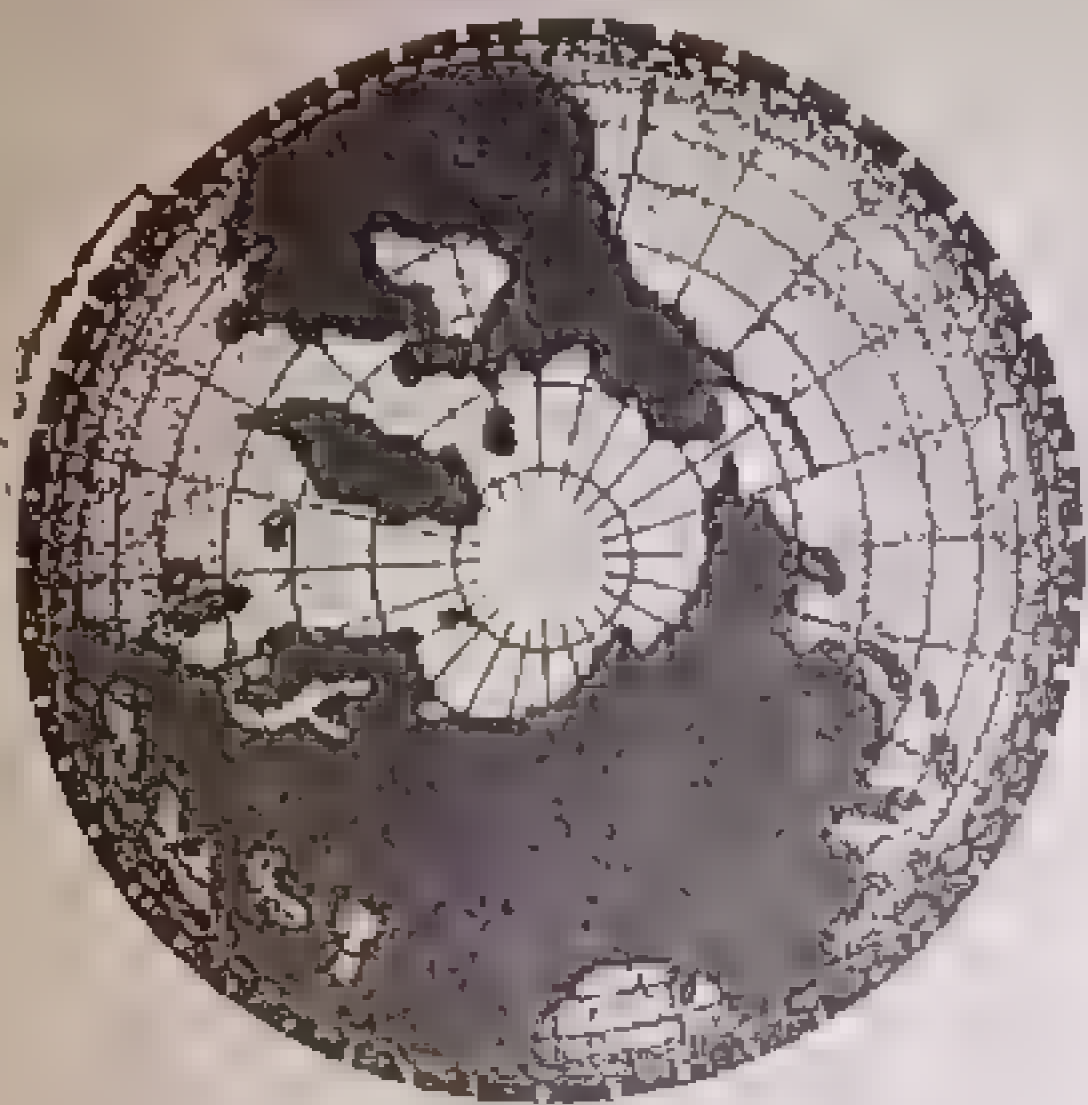


Рис. 55. Поезд, увозящий добычу каменного угля за 1931 г.

НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ

Мы беседовали сейчас о миллионах. Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам — миллиардам, биллионам, триллионам и т. д., остановимся немного на их названиях. Слово «миллион» понимается всеми одинаково: тысяча тысяч. Но слово биллион, триллион и т. д. сравнительно не так давно придуманы и еще не получили единообразного значения. При финансовых расчетах и в житейском обиходе принято у нас называть «биллионом» тысячу миллионов, а «триллионом» — миллион миллионов. Но в книгах по астрономии и физике вы встречаете эти названия в другом значении: биллион означает здесь не тысячу, а миллион миллионов, триллион — миллион миллионов миллионов, квадрильон — миллион миллионов миллионов миллионов, и т. д. Короче говоря: в научных книгах каждое новое высшее наименование принято давать миллиону низших, а в финансовых расчетах и в обиходе — тысяче низших.

Приведенная на стр. 135 табличка наглядно показывает это различие.

Вы видите, что физик или астроном называет биллионом то, что финансист называет триллионом, и т. д., так что, во избежание недоразумений, следует наименование всегда сопровождать цифрами. Это пожалуй единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью не поясняет, а затемняет написанное цифрами. Вы видите также, что астро-

номы и физики гораздо экономнее пользуются новыми названиями, чем финансисты, которым впрочем нет основания особенно скупиться в этом отношении, так как им почти не приходится иметь дело более чем с 12-значными числами; в науке же и 20-значные числа — нередкие гости.[1]

В обиходе и в финансовых расчетах:	квинтильоны	квадрильоны	триллионы	биллионы (= миллиарды)	миллионы	тысячи	единицы
	0	000	000	000	000	000	000
В астрономии и физике:	триллионы		биллионы	миллиарды	миллионы		

МИЛЛИАРД

Миллиард — самое молодое из названий чисел. Оно вошло в употребление лишь со времени окончания франко-прусской войны (1871 г.), когда французам пришлось уплатить Германии контрибуцию в 5 000 000 000 франков. Как и «миллион», слово «миллиард» происходит от корня — тысяча и представляет собою итальянское увеличительное от этого существительного.

Слово «миллиард» употребляется у нас в смысле тысячи миллионов и при денежных вычислениях и в точных науках. Но например в Германии и в Америке под миллиардом иногда

[1] Надо заметить впрочем, что обычные цифровые обозначения весьма больших чисел и их названия употребляются лишь в популярных книгах; в книгах же научных по физике и астрономии пользуются обыкновенно иным способом обозначения: биллион обозначается 10^{12}, триллион 10^{18}, двадцать семь тысяч биллионов — 27.10^{15} и т. д. При таком способе обозначения сберегается место и кроме того гораздо легче производить над числами различные действия (по правилам, изучаемым в алгебре).

разумеют не тысячу, а всего с т о миллионов. Этим между прочим можно объяснить то, что слово «миллиардер» было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из американских богачей не имел состояния в тысячу миллионов. Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось «всего» 900 миллионов долларов, а остальных «миллиардеров» — меньшими числами. Только во время мировой войны появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова (их иногда называют там «биллионерами»).

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 200 000 букв. В пяти таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 50 000 экземпляров этой книжки — стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с бывший Исаакиевский собор.

В одном кубометре содержится кубических миллиметров ровно миллиард (1000 × 1000 × 1000). Попробуем подсчитать, какой высоты получился бы столб, если бы все эти крошечные миллиметровые кубики были поставлены один на другой. Итог получается поразительным — 1000 километров!

М и л л и а р д м и н у т составляет более 19 столетий; человечество всего тридцать с лишним лет назад (29 апреля 1902 года в 10 часов 40 мин.) начало считать второй миллиард минут от первого дня нашей эры.

БИЛЛИОН И ТРИЛЛИОН

Ощутить огромность этих числовых исполинов трудно даже человеку, привычному к обращению с миллионами. Великан-миллион — такой же карлик рядом с сверхвеликаном-биллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и в своем воображении не делаем большой разницы между миллионом, биллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или до 3, а все числа свыше их обозначают словом м н о г о. «Подобно тому, как бокудам кажется несущественной разница между двумя и тремя, — говорит известный германский математик проф. Г. Шуберт, — так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между биллионом и триллионом. По крайней мере они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, пер-

…относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Берлина до Сан-Франциско относится к ширине улицы».

Волос, увеличенный по толщине в биллион раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Во всех книгах, которые, согласно плану первой пятилетки, должны были выйти в свет к концу 1932 г., насчитывается, круглым числом, около 100 биллионов букв. Расставленные в ряд, вплотную одна к другой, они образовали бы нить, которой можно было бы обернуть земной шар по экватору пять тысяч раз!

Взаимоотношение между миллионом, биллионом и триллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Ленинграде еще недавно было миллион жителей. Вообразите же себе длинный прямой ряд городов таких, как Ленинград, — целый миллион их: в этой цепи столиц, тянущихся на семь миллионов километров (в 20 раз дальше Луны), будет насчитываться биллион жителей... Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т.-е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона Ленинградов и который внутри сплошь уставлен Ленинградами: в этом квадрате будет триллион жителей.

Одним триллионом кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотою почти с четырехэтажный дом. Чтобы изготовить такое число кирпичей, все кирпичные заводы СССР должны были бы, выпуская по 5 миллиардов штук в год работать 200 миллионов лет.

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий — т. е. примерно 500 миллионов звезд — были обитаемы и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывался бы «только» один триллион людей.

Последнюю иллюстрацию заимствуем из мира мельчайших частиц, составляющих все тела природы — из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. Вообразите же триллион таких молекул, нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы семь раз обмотать земной шар по экватору!

В каждом куб. сантиметре воздуха (т. е. примерно в на-

перстко) насчитывается — отметим кстати — от 20 до 30 триллионов молекул. Как велико это число, видно между прочим из того, что достигнув, помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения — в сто миллиардов раз, — мы все-таки будем еще иметь в каждом куб. сантиметре до 270 миллионов молекул! Но знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости...

КВАДРИЛЬОН

В старинной (XVIII в.) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадрильона, т. е. единицы с 24 нолями.[1]

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века гораздо скромнее и достигала только до ста миллионов. Вот эта старинная нумерация:

«тысяща»	1 000
«тьма»	10 000
«легион»	100 000
«леодр»	1 000 000
«вран»	10 000 000
«колода»	100 000 000

Магницкий широко раздвинул в своей табличке древние пределы больших чисел. Но он считал практически бесполезным доводить систему наименований числовых великанов чересчур далеко. Вслед за таблицей он помещает такие стихи:

Числ есть бесконечно,
умом нам недочтено.
Несть бо нам определено
тем же есть и безделно
Множайших чисел искати
и болше сей писати

Превосходной таблицы
умов наших границы
И аще кому треба
счисляти что внутрь неба
Довлеет числа сего
к вещам всем мира сего.

---

[1] Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц (биллион — миллион миллионов, и т. д.). Такая система наименований больших чисел принята была и в более поздних русских школьных руководствах (по сколько я могу судить по имеющимся у меня русским учебникам конца XVIII и начала XIX века). И лишь сравнительно недавно получила у нас распространение нынешняя «обиходная» система наименования.

Старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может объять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умов наших границе». Заключающиеся в ней числа (от единицы до квадрильонов включительно) достаточны по его мнению, для исчисления всех вещей видимого мира, — для каждого «кому треба счисляти что внутрь неба».

Любопытно, что еще и в наши дни сейчас упомянутая таблица Магницкого почти достаточна для тех исследователей природы, которым «треба счисляти что внутрь неба». При измерении расстояний до отдаленнейших светил, едва улавливаемых фотоаппаратом помощью сильнейшего телескопа, астрономам не приходится обращаться к наименованиям свыше миллиона. Самое отдаленное из известных нам небесных тел отстоит от Земли на 100 миллионов «световых лет». Если бы мы пожелали даже выразить это расстояние в сантиметрах, то получили бы около 1000 *квадрильонов*; значит мы и тогда не вышли бы еще из пределов таблицы Магницкого.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше квадрильонов. Число молекул в кубическом сантиметре газа—одно из самых больших множеств, реально исчисленных,— выражается десятками триллионов. Число колебаний в секунду для самых быстроколеблющихся волн лучистой энергии (лучей Гесса) не превышает 40 *триллионов*. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько *капель* в океане (приравнивая объем капли 1 *куб. мм*,— что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше квадрильона, потому что число это исчисляется только тысячами квадрильонов.

И лишь при желании выразить, сколько *граммов* вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше квадрильона, так как в числе этом 34 цифры (2 и 33 нуля): две тысячи *квинтильонов*.

Если вам интересно, каковы наименования сверхмиллионов, следующих за квадрильоном, вы найдете их в приводимой здесь табличке:

наименование	*сколько нолей при единице:*
квадрильон	24
квинтильон	30
секстильон	36

наименование	*сколько нолей при единице*
септильон	42
октальон	48
нональон	54
декальон	60
эндекальон	66
додекальон	72

Далее наименований не имеется. Но и эти, сущности, почти не употребляются и мало кому известны. Как велики выражаемые ими числа, видно хотя бы из того, что число граммов вещества в видимой в с е л е н н о й (по современным воззрениям) «всего» 10 нональонов.

ПОЖИРАТЕЛИ ЧИСЛОВЫХ ИСПОЛИНОВ

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода — на кубической миле; мы имеем в виду г е о г р а ф и ч е с к у ю милю, составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 метров. С кубическими мерами воображение наше справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину — особенно для крупных единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. И если мы превратно представляем себе уже кубическую милю — самую большую из наших объемных мер, — то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, Солнца? Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести более соответствующее представление о кубической миле.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением талантливого германского популяризатора А. Бернштейна, приведя (в несколько обработанном виде) длинную выписку из его полузабытой книжечки — «Фантастическое путешествие через вселенную» (появившейся более полувека тому назад).

«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю ($7^1/_2$ *км*) вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя — статуя более семи километров высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 метров;

нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до поясницы статуи!

Вообразим теперь, что мы поставили две таких мачты вышиною в милю на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это — квадратная миля.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе еще четыре подобных стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю

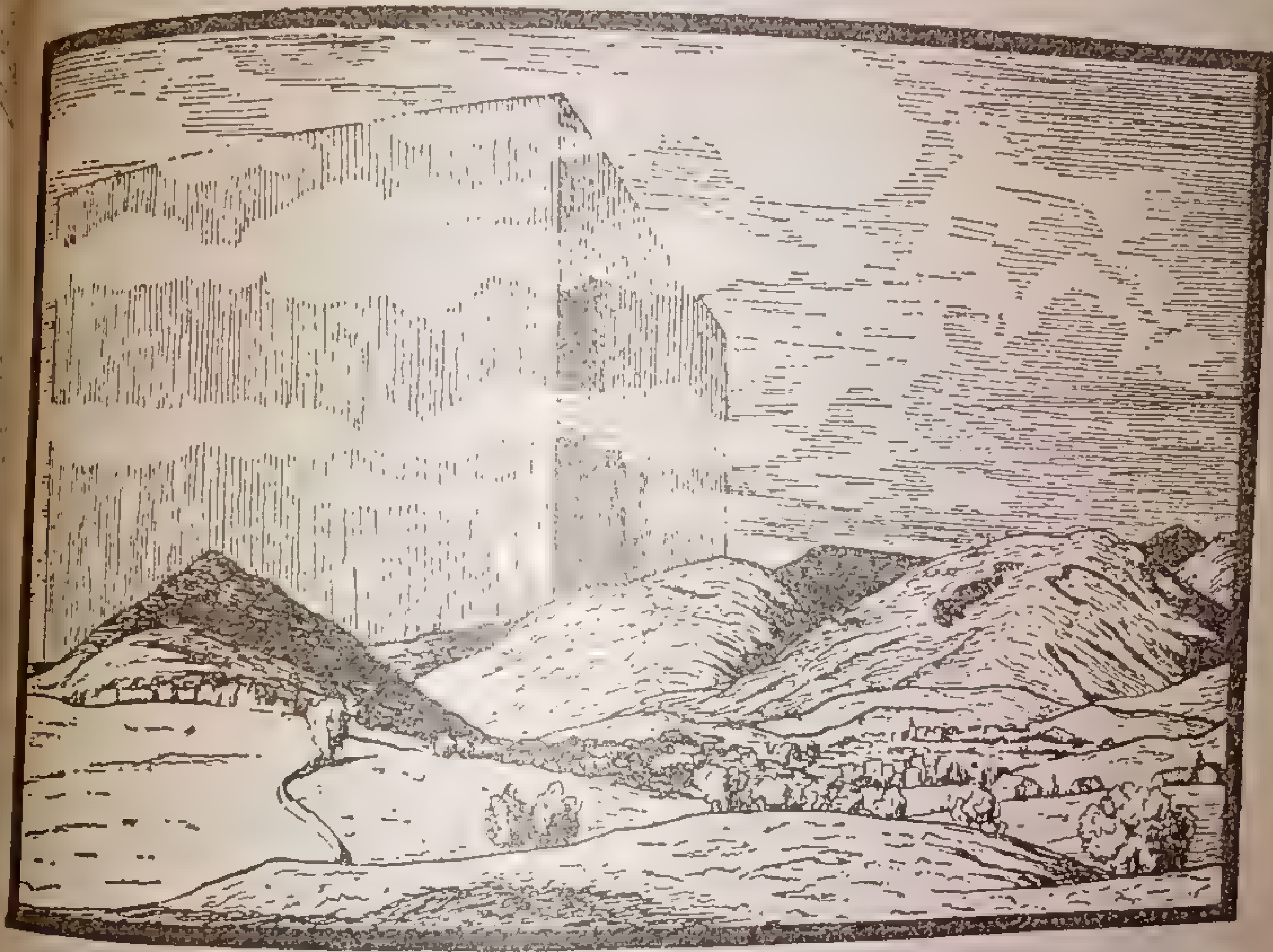


Рис. 56. Ящик объемом в одну кубическую географическую милю мог бы вместить здания всего мира, флоты всех государств, все машины и сооружения пяти частей света, население всего земного шара, всех животных нашей планеты — и притом не был бы еще полон до верху!

ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Ленинграда. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все крупные и мелкие города. Но так как все это покрыло только дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колон-

нами, башней и бросим туда же. Всё это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало! Бросим туда все что только сделано руками человека в Европе; но и с этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира,—все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелем ее в ящике, — мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии уляжется в первом слое. Покроем их мягким слоем в фут толщиною и уложим еще столько же. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии... Все это заняло не более 50 слоев, т. е., считая слой толщиной в метр, — всего 50 метров. Понадобилось бы в десятки раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика...

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь живой мир — всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползает, — то и тогда не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песку.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение.»

К сказанному прибавим еще от себя, что кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их несколько триллионов. Как видите, этот кубический исполин — настоящий пожиратель других исполинов.

Весьма внушительную вместимость имеет и кубический километр. Те 152,5 млн тон каменного угля, добыча которых предусмотрена вторым пятилетним планом нашего социалистического строительства, заняли бы в километровом ящике довольно скромный уголок, составляющий немного более 25-ой доли объема этого куба.

А вы вероятно не забыли, что для перевозки такой горы нам потребовался бы товарный поезд не короче длины земного экватора... Миллион кубических метров бетона, уложенных при возведении плотины Днепрогэса, также незаметно поглощается новым исполином, который в 1000 раз больше объема этих бетонных работ.

Нетрудно подсчитать, что ящик в 1 кубический километр мог бы вместить 5000 биллионов спичек, вплотную уложенных; для изготовления такого количества спичек фабрика, выпускающая **миллион** спичек в сутки, должна была бы работать 14 миллионов лет; а чтобы такое число спичек доставить, потребовалось бы 10 миллионов вагонов — поезд длиною в 1000 000 километров, в $2^1/_2$ раза длиннее земного экватора.

ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

Огромные промежутки времени представляются нами еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Геология учит, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один немецкий ученый[1] предлагает для этого такой способ:

«Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 *км*. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала **кембрийской** эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500 — 1000 *м* изобразят длительность **ледникового** периода; а 6000 лет мировой истории сократятся до 6 *м* — длины комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 *см*. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для нее скоростью 3,1 *мм* в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала мировой войны до наших дней она одолеет в 6 секунд... Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может объять своим умом. Как ничтожна вся история человечества, которую наше самомнение окрестило «всемирной» историей, и как бесконечно мала в потоке мировых событий одна человеческая жизнь!»

---

[1] Лотце. Древность Земли

ЗАДАЧА-ШУТКА

Какое число делится на все числа остатка?

(Ответ — на стр. 154.)



Рис. 57. От великанов к лилипутам.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ

ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов, — к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько единица меньше арифметического великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, биллиону и т. д., т. е. делить единицу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1000000}, \quad \frac{1}{1000000000}, \quad \frac{1}{1000000000000} \text{ и т. д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, биллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-лилипут и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали (стр. 135), что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1 000 000 . . . . 10^6
10 000 000 . . . . 10^7
400 000 000 . . . . $4 \cdot 10^8$
6 квадрильонов . . . . . $6 \cdot 10^{24}$, и т. д.

Соответственно этому, числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$\frac{1}{1000000}$ . . . . 10^{-6}
$\frac{1}{100000000}$ . . . . 10^{-8}
$\frac{3}{1000000000}$ . . . . $3 \cdot 10^{-9}$ и т. д.

Есть ли однако реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело с столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

ЛИЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда, по обычному представлению, — настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать $\frac{1}{1000}$ секунды, — но это чисто бумажная величина, потому что ничего будто бы не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма многие явления. Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 *м* и следовательно в течение 1000-й доли секунды успевает продвинуться на один сантиметр. Звук в воздухе по-

реносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700—800 *м* в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 *см*. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды, в своем обращении вокруг Солнца, на 30 *м*. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2—4 и более полных колебания; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды: в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь значительное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но — возразите вы — 1000-ю долю секунды еще нельзя признать за лилипута, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Вот если взять *миллионную* долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это — величина нереальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь! Даже и одна миллионная доля секунды — для современного физика например — вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300 000 километров; следовательно, в 1 000 000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 *м* — примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волнообразное, и число световых волн, минующих ежесекундно каждую точку пространства, исчисляется сотнями биллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 биллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1 000 000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 000 000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении Рентгеновых лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у

видимых: она достигает 2500 биллионов в секунду! Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Лучи «гамма» и недавно открытые «космические» лучи Гесса обладают частотой еще большей, чем лучи Рентгена. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого в пять дюжин раз и следовательно имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

ЛИЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления — миллиметр; он примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерять предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупен. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице — микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же оказывается чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы, молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 100-й до одной 1000-й доли микрона.[1] Если остановиться на последней, большей величине, то и тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего один миллиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева

[1] Мельчайшая единица длины, употребляемая в современной физике, есть ИКС; он равен 10 000 000-й доле микрона.

башня (300 *м* высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300 000 *км* в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседство от орбиты Луны. Люди были бы величиной в 1/4 земного радиуса — в 1700 *км*; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600—700 *км*. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждое более 7 *м* в поперечнике. Волос имел бы 100 *м* в толщину. Мышь достигала бы 100 *км* в длину, муха — 7 *км*. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед вами в виде... типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь дознано, что атом — целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом например водорода состоит из центрального «ядра» и быстро обращающегося вокруг него «электрона». Не входя в другие подробности, скажем только, что поперечник электрона измеряется биллионными долями миллиметра. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз меньше поперечника атома. Если же пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько пылинка меньше — чего бы вы думали?— земного шара!

Вы видите, что атом — лилипут среди лилипутов — является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав,— таким же исполином, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лилипутом по отношению к последующей:

электрон
атом
пылинка
дом
земной шар
солнечная система
расстояние до Полярной звезды.
Млечный Путь.

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз[1] больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной и исчезающе малой, в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить.

СВЕРХИСПОЛИН И СВЕРХЛИЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы неполны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода, — диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем с следующей, на вид весьма незамысловатой задачи:

Задача № 58

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Решение

Хочется ответить: 999, — но вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой; иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^{9}}$$

Выражение это означает: «девять в степени девять в девятой степени». Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность ожидаемого результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

$$387\,420\,489.$$

[1] Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), т. е. поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома и т. п. Подробнее о такого рода сопоставлениях см. мою книгу «Знаете ли вы физику?»

т. е. произведение 387 420 489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений...

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат — по трем причинам, которые нельзя не признать уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369 693 100 цифр: набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 км — от Ленинграда до Горького. Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить почему: если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, — не более 172 800 цифр. Отсюда следует, что, не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число...

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428 124 773 175 747 048 036 987 118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом — неизвестно.[1] А ведь там 369 693 061 цифра!...

Вы видите, что уже *число цифр* нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление об его громадности, потому что такого множества вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь — нет в *целой вселенной*!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, наполнен был тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64, а из 370 *миллионов* цифр — следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

---

[1] Начало числа вычислено помощью логарифмов, конец — определен по соображению.



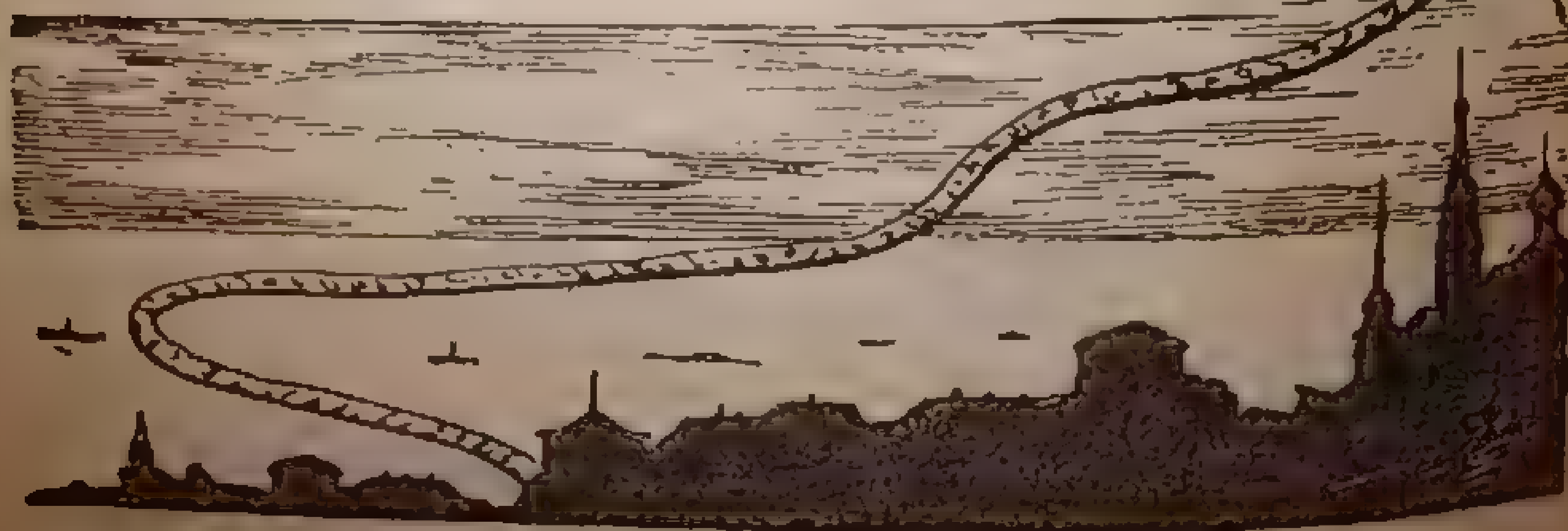


Рис. 58. Число, выраженное степенью

$$9^{9^{9}}$$

состоит из 370 миллионов цифр. Если бы написать все эти цифры тесно одна к другой на бумажной ленте, она протянулась бы на тысячу километров от Ленинграда до Горького.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо «исчисления песчинок» произведем «исчисление электронов». Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для радиуса видимой вселенной примем расстояние в м и л л и а р д световых лет. [1] Так как свет пробегает в секунду 300 000 *км*, а в году 31 миллион секунд, то можно сосчитать, что «световой год» равен круглым счетом 10 биллионам *км* (гнаться за большой точностью здесь бесполезно). Значит, для радиуса всей известной нам вселенной получаем величину

10 миллиардов биллионов *км*,

или, — прибегая к способу изображения числовых великанов, объясненному на стр. 146, —

$$10^{22} \text{ км.}$$

Объем шара такого радиуса можно вычислить по правилам геометрии: он равен (с округлением) 44×10^{66} *куб. км.* Умножив это число на число куб. сантиметров в куб. километре (10^{15}), получим для объема видимой вселенной величину

$$10^{81} \text{ куб. см.}$$ [2]

Теперь представим себе, что весь этот объем с п л о ш ь заполнен самыми тяжелыми из известных нам атомов — атомами элемента урана, которых идет на грамм около 10^{22} штук. Их поместилось бы в шаре указанного объема 10^{103} штуки. Дознано, что в каждом атоме урана содержится 238 электронов (внешних и внутренних). Поэтому во всей доступной нашему исследованию вселенной могло бы поместиться не более

10^{106} электронов.

Число, состоящее «всего лишь» из 107 цифр... Как это мизерно по сравнению с нашим числовым великаном из 369 м и л л и о н о в цифр! [3]

Вы видите, что наполняя сплошь видимую вселенную — величайшее, что мы знаем, — электронами, т. е. мельчайшим из того, нам известно, — мы не исчерпали бы и небольшой

---

[1] Самый далекий небесный предмет, известный астрономам, находится на расстоянии 100 миллионов световых лет, т. е. вдесятеро ближе.

[2] Небезынтересно отметить, что Архимед в своем исчислении песчинок определял объем вселенной в 5×10^{54} *куб. см.*

[3] В действительности наличное число электронов видимой вселенной не превышает 10^{79}.

доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^{9}}$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности.

Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим единицу на это число. Будем иметь:

$$\frac{1}{9^{9^{9}}}$$

что равно:

$$\frac{1}{9^{387420489}}$$

Мы имеем здесь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверхвеликан превратился в сверхлилипута.

ОТВЕТ

на задачу-шутку

(предложенную на стр. 144):

Число, делящееся на все числа без остатка, есть —

произведение всех чисел.

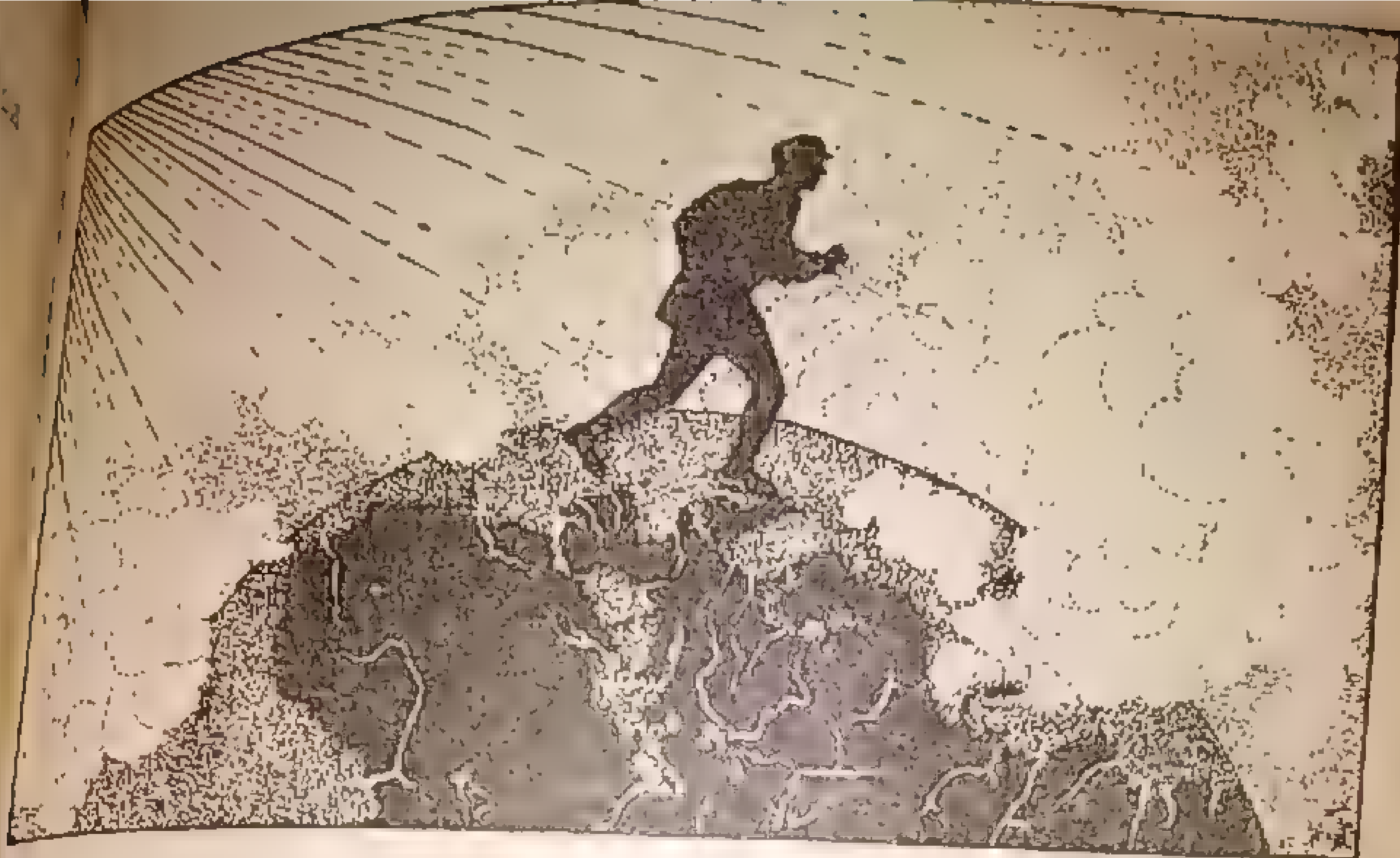


Рис. 59. Каждый из нас в течение своей жизни успел совершить не меньше одного кругосветного путешествия.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ

ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я занимался в редакции одного распространенного ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое имя и весьма необычное обозначение профессии: «первый русский кругосветный путешественник пешком». По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, — но о «кругосветном путешественнике пешком» я еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что теперь оно именно и совершается. Маршрут? Шувалово — Ленинград; [1] о дальнейшем он желает посоветоваться со мною... Из разговора выяснилось, что планы

---

[1] Шувалово — небольшая станция в 10 *км* от Ленинграда.

«первого русского и т. д.» довольно смутны, но, во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

— Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? — с изумлением спросил я.

— Главное дело длину земного обхвата пройти, это можно и в России сделать, — разрешил он мое недоумение. — Десять километров уже пройдено, и остается...

— Всего 39 990. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, — он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч *км*. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И вы, и я, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав называться «русским кругосветным путешественником пешком», в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет убедит вас в этом.

В течение каждого дня вы конечно не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, — словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30 000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4—5 *км*. Это составляет в день, за 5 часов, 20—25 *км*. Теперь остается умножить дневной переход на 360, — и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200, \text{ или же } 25 \times 3600 = 9000.$$

Итак, даже малоподвижный человек, никогда не покидавший родного города, проходит е ж е г о д н о пешком около 8000 *км*. А так как окружность земного шара имеет 40 000 *км*, то нетрудно вычислить, во сколько лет совершаем мы пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40\,000 : 8000 = 5$$

Значит в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста, дважды совершил уже «кругосветное путешествие». Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, т. е пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380 000 *км*).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН

Задача № 59

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или квартирного врача, целый день занятого посещением пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, — они конечно удивятся такому вопросу. Между тем вы легко можете доказать каждому из них, что, не будучи альпинистами, они наверное совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестнице при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

Решение

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры, допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом — в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем, для круглого числа, в 10 *м*: следовательно наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту $10 \times 10 = 100$ *м*. Высота Монблана 4800 *м*. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней...

Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон

поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?

Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 *см* и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 *км*, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана, или — если угодно — поднимается в пять раз выше полета стратостата «Осоавиахим».

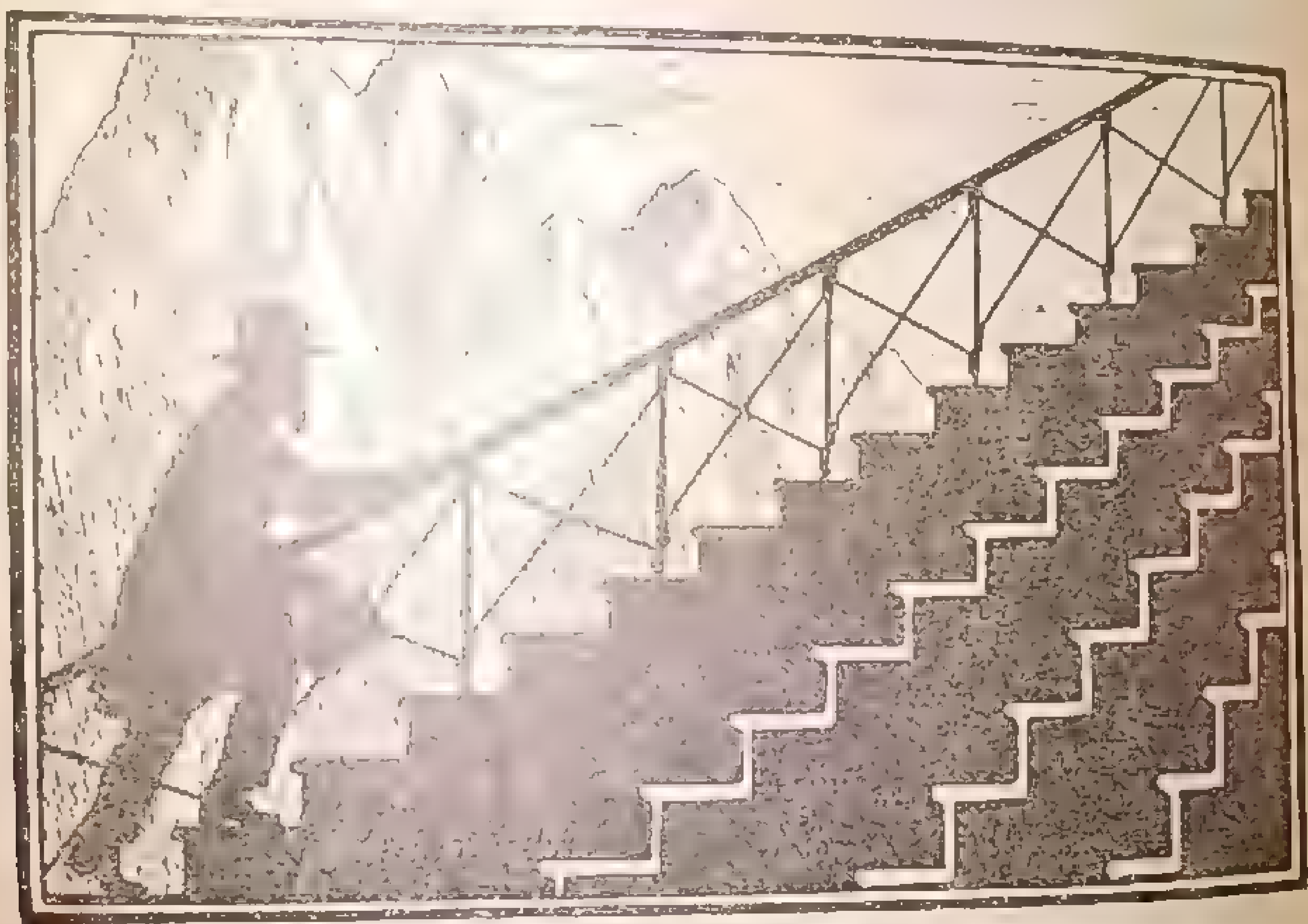


Рис. 60. Врач квартирной помощи раз двадцать в год совершает восхождение на Монблан.

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно того не ведая. Я живу во втором этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками — число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать две квартиры, расположенные, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, т. е. взбегаю

вверх каждый день на 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

$$140 \times 360 = 50\,400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50 000 ступеней. В 60 лет я успею подняться на вершину сказочно-высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 *км*)! Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой лестницы, уходящей в бесконечную даль, и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины... На [illegible] же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, — например служители при лифтах? Кто-то подсчитал, что например служитель при лифте нью-йоркского небоскреба совершает за 15 лет службы подъем до высоты... Луны!

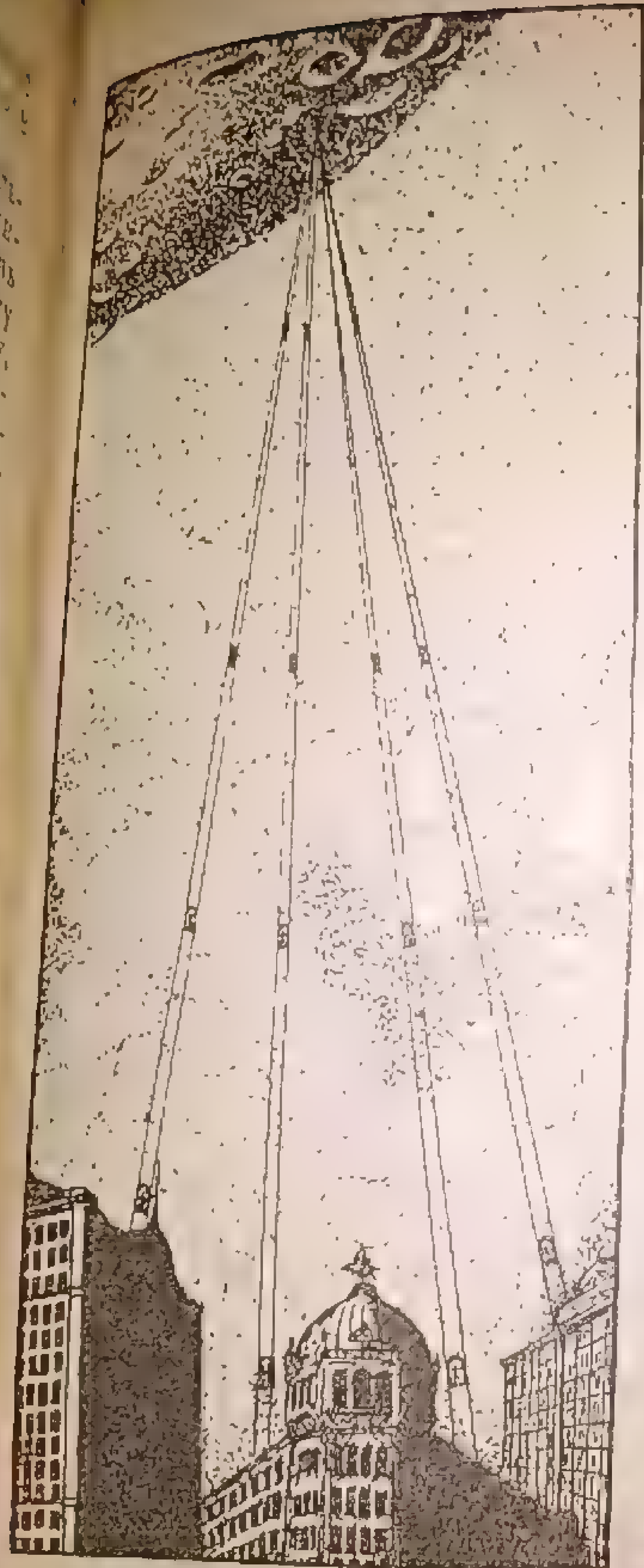


Рис. 61. Служитель при лифте американского небоскреба в течение 15 лет совершает подъем до высоты Луны.

НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени служи-

толь подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 *м* и человек сбегает по ней ежедневно только 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в $30 \times 20 = 600$ *м*, а в год $600 \times 12 = 7200$ *м* — более 7 *км*. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на два с небольшим километра!

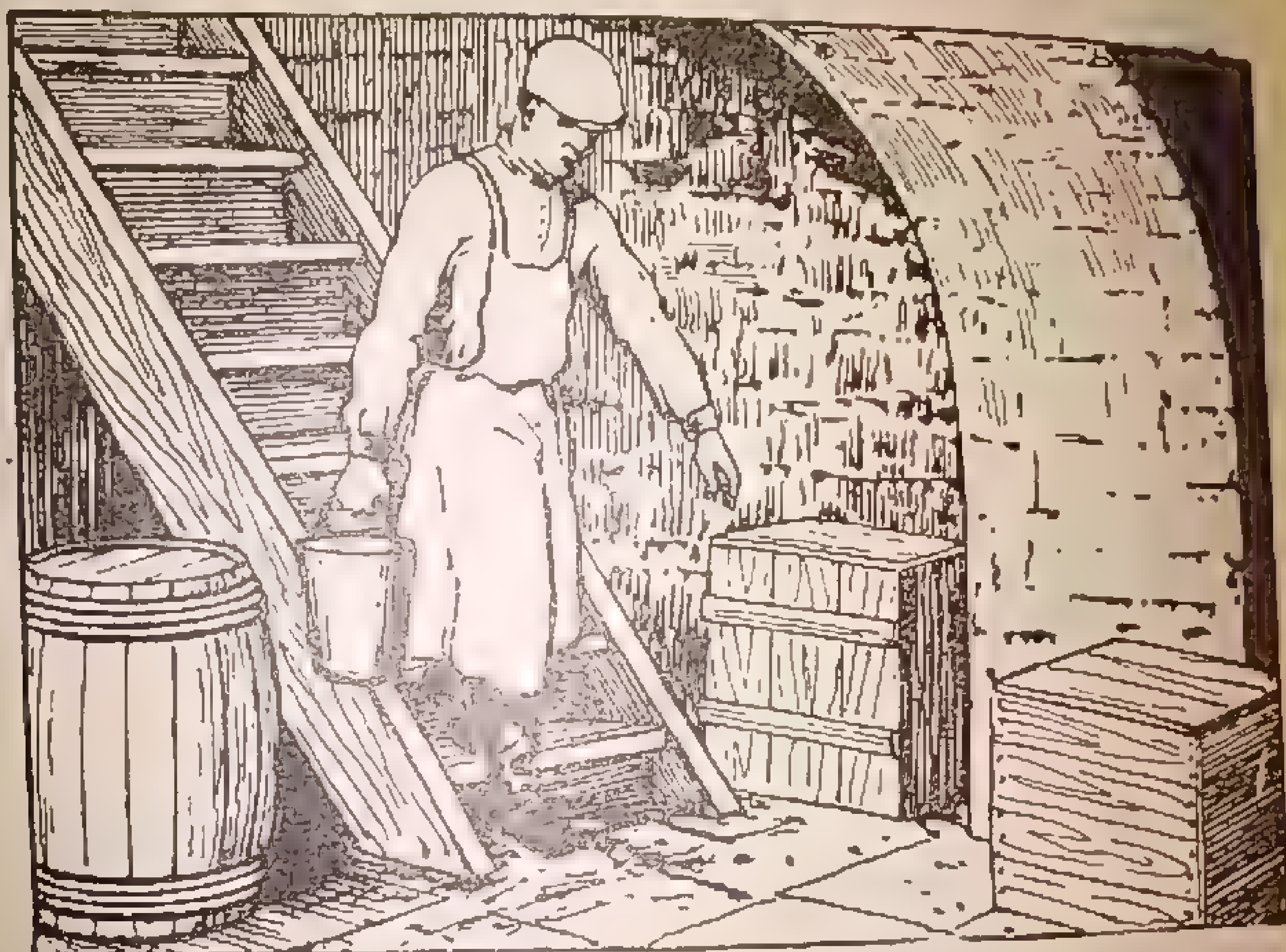


Рис. 62. Работник подвального склада ежегодно спускается до дна океана.

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой работник подвального торгового помещения достиг бы дна океана в течение одного года.

ТРАКТОР КРУГОМ СВЕТА

Каждый трактор работает на социалистических полях наших колхозов и совхозов около 2500 часов ежегодно. Средним числом он проходит в час 5 *км*. Годовой путь его следовательно составляет

$$5 \times 2500 = 12\,500 \text{ км}.$$

Легко подсчитать, во сколько лет прокладывает трактор путь, равный окружности земного шара:

$$40\,000 : 12\,000 = 3{,}2.$$

В течение одной пятилетки трактор, сейчас работающий в СССР, успеет раза полтора совершить кругосветное путешествие.

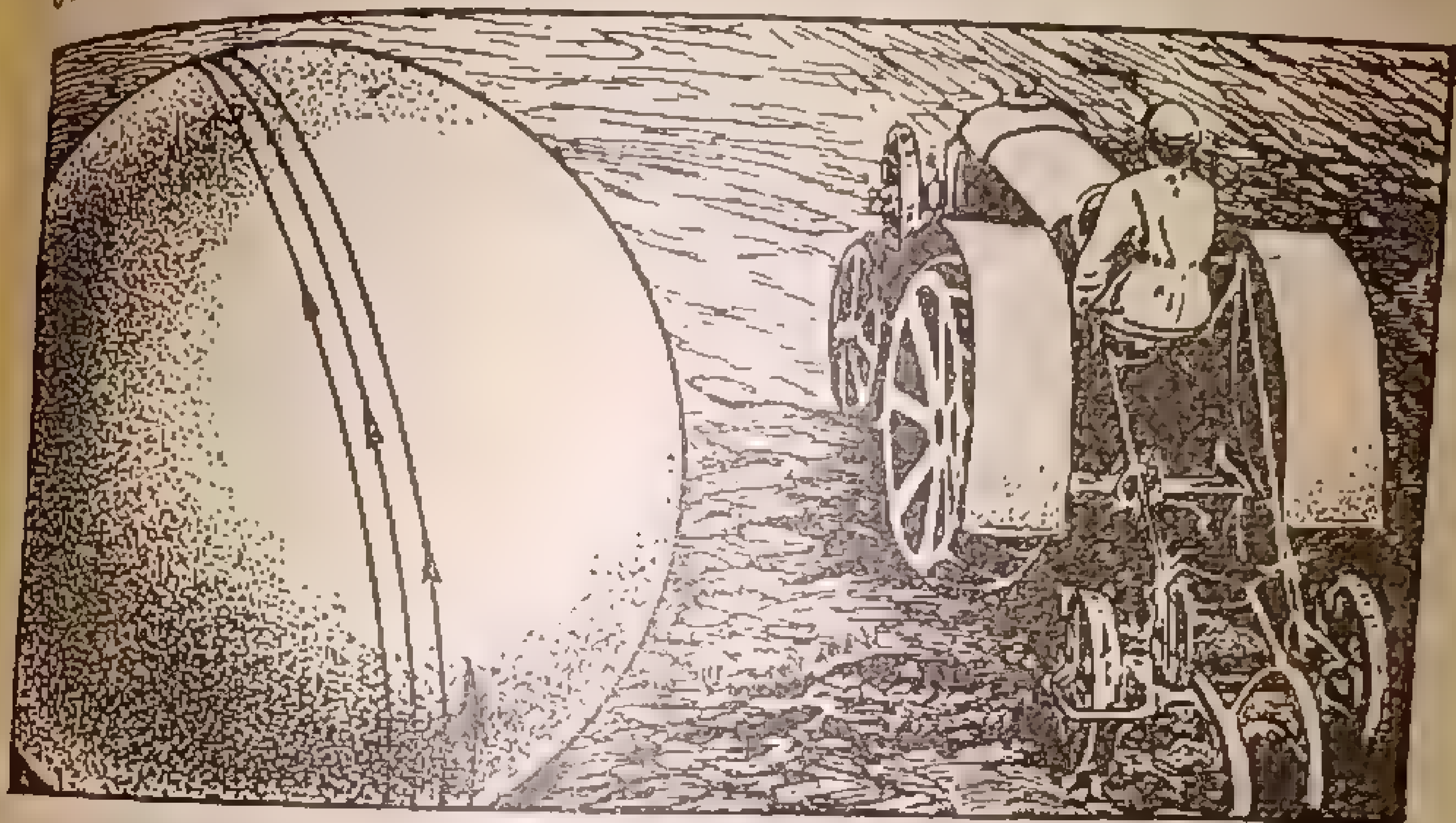


Рис. 63. Трактор за десятилетие работы трижды обходит кругом земного шара.

В этом отношении он обгоняет каждого из нас, незаметно совершающего в 5 лет только одно кругосветное путешествие, но зато уступает своему собрату-паровозу (товарному), который успевает на железных дорогах нашего Союза проделать «кругосветный» пробег всего лишь в 8 месяцев (пассажирский даже в 6 месяцев).

НЕУТОМИМОЕ КОЛЕСИКО

Кругосветный путешественник имеется и у многих из нас в кармане — внутри карманных часов. Откройте заднюю крышку карманных часов и рассмотрите механизм. Все зубчатые его колеса так медленно вертятся, что с первого взгляда кажутся даже и вовсе неподвижными. Надо долго и внимательно следить за колесиками, чтобы заметить их движение. Исключение составляет только крошечный маховик — так называемый балансир, — который без устали качается взад и вперед. Движения его так проворны, что трудно сосчитать,

сколько качаний успевает он сделать в одну секунду. Пять раз поворачивается он в течение каждой секунды то в одну, то в другую сторону попеременно. При этом колесико делает каждый раз один полный оборот и еще пятую долю.

Попробуем сосчитать, сколько оборотов делает оно в течение каждого года; ведь в руках аккуратного человека часы никогда не останавливаются: он не забывает их во-время заво-

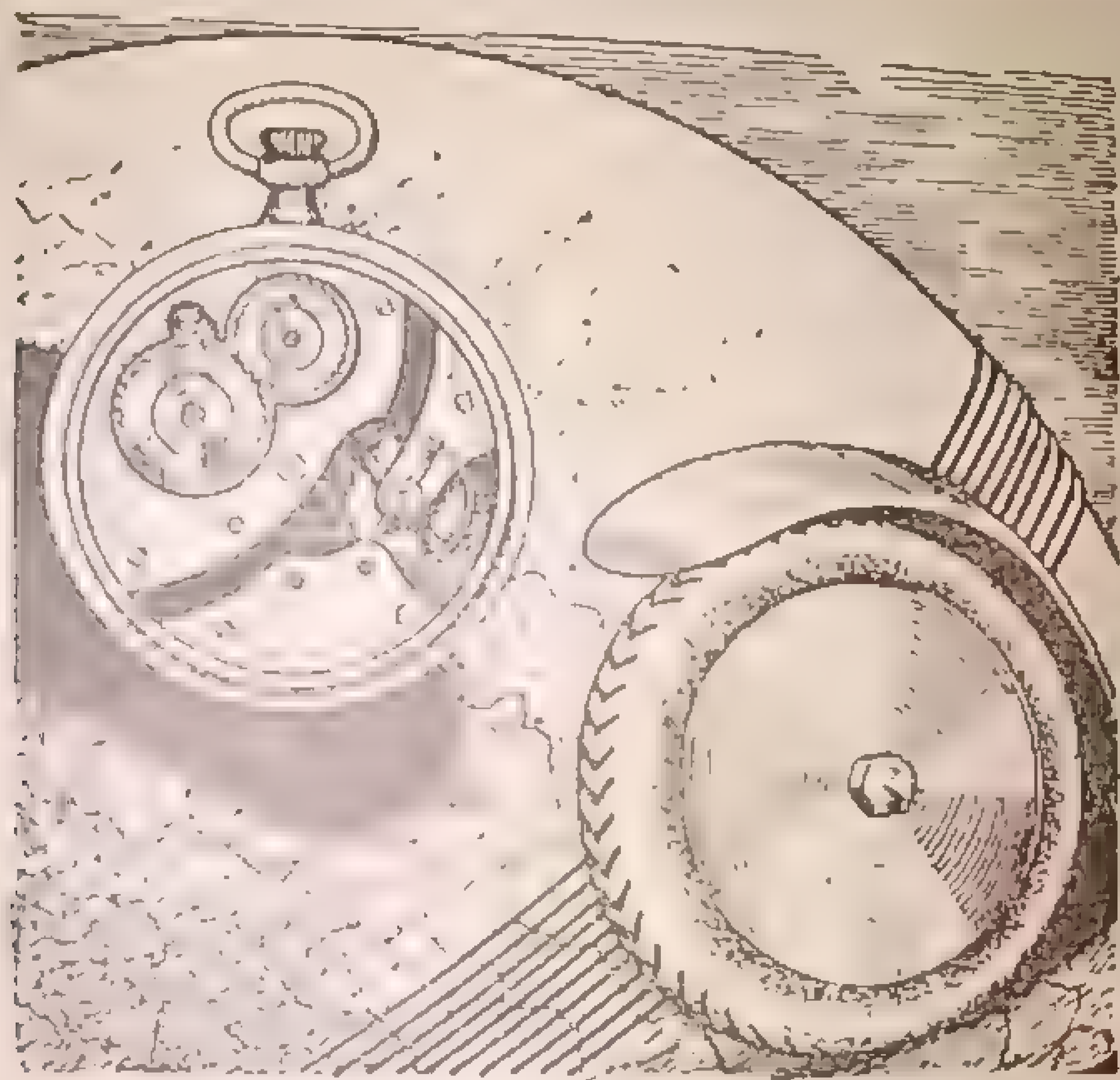


Рис. 64. Неутомимое колесико наших карманных часов.

дить. Каждую минуту колесико делает $5 \times 60 = 300$ качаний, а каждый час $300 \times 60 = 18\,000$. В сутки это составляет $18\,000 \times 24 = 432\,000$ качаний. Считая в году для круглого числа 360 дней, имеем, что ежегодно балансир делает

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ качаний.}$$

Но было уже сказано, что балансир поворачивается при одном качании на $1\frac{1}{5}$ полного оборота. Значит, в течение года он успевает обернуться вокруг своей оси

$$155\,520\,000 \times 1\frac{1}{5} = 186\,624\,000 \text{ раз,}$$

круглым счетом 187 миллионов раз.

Уже одно это огромное число достаточно удивительно. Вы поразитесь еще более, если проделаете другой расчет: вычислите, какой путь прошел бы автомобиль, если бы колеса его обернулись 187 миллионов раз. Поперечник автомобильного колеса 80 *см*; значит, окружность его — около 250 *см*, или $2\frac{1}{2}$ *м*. Умножив $2\frac{1}{2}$ на 187 миллионов, получим длину пути, которую мы желаем знать: около 470 000 километров.



Рис. 65. Один из тех, кто совершает кругосветные путешествия, стоя на месте.

Следовательно автомобиль, будь его колеса так же неутомимы, как балансир карманных часов, более чем 10 раз обходил бы ежегодно земной шар, или, — если хотите, — пробегал бы путь больший, чем от нас до Луны! Не трудно представить себе, сколько раз понадобилось бы во время такого путешествия починять и даже сменять колеса автомобиля. А между тем маленькое колесико карманных часов неутомимо качается по целым годам без починки, без новой смазки, без смены и работает притом с изумительной точностью...

ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ СТОЯ НА МЕСТЕ

Задача № 60

Последние строки книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться в свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика «свинцовой армии», скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние. Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня 8000 букв и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние, в среднем, около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней.

Решение

$$2 \times 0,5 \times 8000 \times 300 = 2\,400\,000 \text{ м, т. е. } 2400 \text{ км.}$$

Значит, за 16—17 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник!» Это звучит куда оригинальнее, чем «кругосветный путешественник пешком».

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что он этого не сделал, вы, надеюсь, сможете «математически» доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

X. ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ.

XI. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ.

ВНЕ ГЛАВ.

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

ЗАГАДКИ И ДИКОВИНКИ В МИРЕ ЧИСЕЛ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, ПРОСМОТРЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

РИС. ХУД. Ю. Д. СКАЛДИНА



ОГИЗ МОЛОДАЯ ГВАРДИЯ 1934
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Репринтное издание—М. 1934 г.

Перельман Я.И

П27 Занимательная арифметика.—М.: АО «СТОЛЕТИЕ», 1994,—176 с.

П $\frac{4809000000-02}{41А(03)-94}$ Без объявл.

ISBN 5-7459-0002-4

Фирма имеет представительство в Уральском регионе:
г. Каменск-Уральский, Свердловской обл.,
ул. Алюминиевая, 31
тел. 8-34378-2-70-91

Наши региональные партнеры на Севере:
ТОО «Регион Ltd.» пр. Ломоносова, 183 к.1
тел. 8-8180-49-68-54

в г. Сыктывкаре:
ТОО «Радонеж» ул. Куратова, 2 кв. 35
тел. 8-82122-2-55-75

Научно-популярное издание
Для младшего возраста

Яков Исидорович ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

ISBN 5-7459-0002-4

ЛР №063236 от 4.01.94
Репринтное издание. Подписано в печать 10.05.94
Формат 84x108 1/32. Бум. офс. Печать офсет.
Усл.-печ. 9,24 л. Уч.-изд. 10,89 л. Тираж 50000 экз.
Заказ №286 С 01

АО «СТОЛЕТИЕ», 111141, Москва, Перовская, 39, к. 1
Изготовленно в книжной типографии Министерства печати и информации России
600000, г.Владимир, Октябрьский проспект, д.7



